Linköpings universitet
Magnus Berggren, MAI

Tentamen i Analys i en variabel del 2, utbildningskod TAIU10, modul TEN2. 2020-08-22, kl 8.00 – 13.00

Penna,radergummi,linjal,passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga,välmotiverade,ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg n ($n = 3, 4$ eller 5) krävs minst $4(n\text{-}1)$ poäng. Godkänd dugga 3 ger 1-2 bonuspoäng. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng (B=0,B=1 eller B=2) du har.

---

1. Beräkna följande integraler

   a) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int x^2 \sin(x^3+1)dx$ c) $\int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx$

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen

   $y'' - 4y' + 4y = e^x$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 5$

3. Bestäm arean av det område som ligger mellan x-axeln och kurvan
   $y = \frac{1}{x^2+3x+2}$, $x \geq 1$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'(x) + \frac{1}{x+1}y(x) = e^{x^2+2x}$ som i punkten $x = 0$ har tangent som är parallell med linjen $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

5. Bestäm konstanterna a och b så att

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax^2 + e^{bx} - 1 - x}{\ln(1+x^2)} = -\frac{5}{2}.$$

6. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området mellan x-axeln och kurvan $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, roteras ett varv kring linjen $x = 4$.

7. Låt $f(x) = e^{4x} + 2e^{2x} - 5$. Beräkna $\int_{-2}^{3} g''(y)dy$ där $g(y) = f^{-1}(y)$.

Kortfattat lösningsförslag till tentamen
Analys i en variabel del 2. TAIU10.
2010-08-22.

1 a.
$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx = \left/ \begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right/ = \int_2^3 \frac{t}{t^2-t}\,2t\,dt =$$

$$= \int_2^3 \frac{2t}{t-1}\,dt = 2\int_2^3 \frac{t-1+1}{t-1}\,dt = 2\int_2^3 \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\Big[\,t+\ln|t-1|\,\Big]_2^3 = 2\big(3+\ln 2-(2+\ln 1)\big) =$$

$$= 2(1+\ln 2) = 2+2\ln 2 = \underline{\underline{2+\ln 4}}$$

b.
$$\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx = \left/ \begin{array}{c} t=x^3+1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right/ = \int \frac{1}{3}\sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos t)+C = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos(x^3+1)+C}}$$

c.
$$\int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{6x}{(x-1)(x+2)}\,dx \underset{PBU}{=}$$

$$= \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\right)dx = \underline{\underline{2\ln|x-1|+4\ln|x+2|+C}}$$

$A=2 \quad B=4$

2. $y''-4y'+4y = e^x$

(1.) Sök y_h. K.E. $r^2-4r+4=0$

$(r-2)^2 = 0$

$r_1 = r_2 = 2$.

$$y_h = (Cx+D)e^{2x}$$

(2.) Sök y_p. Sub. $y = ze^x$ där $z=z(x)$

$y' = z'e^x + ze^x = (z'+z)e^x$

$y'' = (z''+z')e^x + (z'+z)e^x = (z''+2z'+z)e^x$

insättning ger

$z''+2z'+z-4(z'+z)+4z = 1$

$z''-2z'+z = 1$ $\qquad z_p = a$

$a = 1$ $\qquad z_p' = z_p'' = 0$

$y_p = 1\cdot e^x = e^x$

$$y = y_h + y_p = (Cx+D)e^{2x}+e^x$$

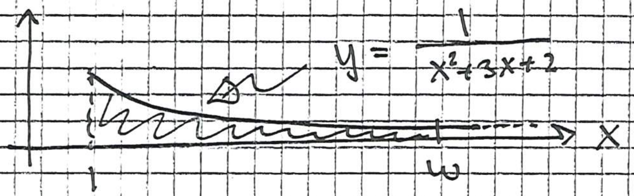
$y(0)=2$ ger $2 = D+1 \Rightarrow D=1$

$y' = Ce^{2x}+(Cx+1)e^{2x}\cdot 2+e^x$

$y'(0)=5$ ger $5 = C+2+1 \Rightarrow C=2$

Svar: $\underline{\underline{y = (2x+1)e^{2x}+e^x}}$

3.



$$\int_1^{\omega} \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int_1^{\omega} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx \underset{PBU}{=}$$

$$= \int_1^{\omega} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}\right)dx = \left[\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_1^{\omega} =$$

$$= \ln\left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right) - \ln\frac{2}{3} = \ln\left(\frac{\cancel{\omega}(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{\omega}})}{\cancel{\omega}(1+\underset{\to 0}{\frac{2}{\omega}})}\right) + \ln\frac{3}{2}$$

$$\longrightarrow \ln 1 = 0$$

då $\omega \to \infty$

Svar: $\underline{\underline{\ln\frac{3}{2}}}$ a.e.

4. $$y' + \frac{1}{x+1}y = e^{x^2+2x}$$

$$i.f = e^{\int \frac{1}{x+1}dx} \underset{\substack{\uparrow \\ x>-1}}{=} e^{\ln(x+1)} = (x+1)$$

mult. med i.f.

$$y'(x+1) + y = (x+1)e^{x^2+2x}$$

$$(y(x+1))' = (x+1)e^{x^2+2x}$$

$$y(x+1) = \int (x+1)e^{x^2+2x}\,dx = \Big/ \begin{matrix} t = x^2+2x \\ \vdots \\ \text{osv} \end{matrix} \Big/$$

$$y(x+1) = \frac{e^{x^2+2x}}{2} + C$$

$$y = \frac{e^{x^2+2x}}{2(x+1)} + \frac{C}{x+1}$$

$y'(x) =$ tangentens k-värde.

$$y'(0) = -\frac{1}{2}$$

Sätt $x = 0$ i ursprungliga diff. ekv.

$$\underbrace{y'(0)}_{=-\frac{1}{2}} + y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = \frac{3}{2}$$

ger $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 1$

Svar: $$\underline{\underline{y(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{2(x+1)} + \frac{1}{x+1}}}$$

5. Maclaurinutv. ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + \left(1 + bx + \frac{(bx)^2}{2!}\right) - 1 - x + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} =$$

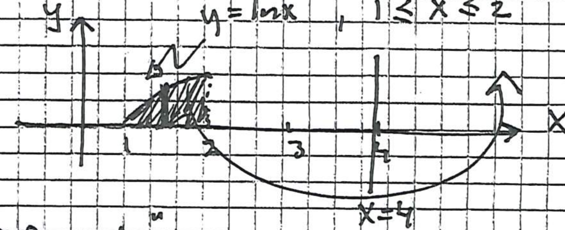
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(b-1)x + \left(a + \frac{b^2}{2}\right)x^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{b-1 + \left(a + \frac{b^2}{2}\right)x + O(x^2)}{x + O(x^3)} = \left| \begin{array}{l} b \neq 1 \Rightarrow \\ \text{Grv. exist ej} \\ \therefore b = 1 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a + \frac{1}{2} + \overbrace{O(x)}^{\to 0}}{1 + \underbrace{O(x^2)}_{\to 0}} = a + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow a = -3$$

Svar: $\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$

6. $y = \ln x \ , \ 1 \leq x \leq 2$



"rörformeln".

$$V = \int_1^2 2\pi(4-x)y\,dx = 2\pi \int_1^2 \underset{\uparrow}{(4-x)} \underset{\downarrow}{\ln x}\,dx =$$

$$= 2\pi \left(\left[\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}\,dx \right) =$$

$$= 2\pi \left(6\ln 2 - \left[4x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 \right) =$$

$$= 2\pi \left(6\ln 2 - \left(7 - 4 + \frac{1}{4} \right) \right) =$$

$$= 12\pi \ln 2 - \frac{13\pi}{2} \quad \text{v.e.}$$

7. $$\int_{-2}^{3} g''(y)\,dy = \left[g'(y) \right]_{-2}^{3} = g'(3) - g'(-2)$$

Derivatan av invers. $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ där $y = e^{4x} + 2e^{2x} - 5$

$y=3$ ger $3=(e^{2x})^2+2e^{2x}-5$

$t=e^{2x}>0$ $t^2+2t-8=0$

$t=-1\pm\sqrt{1+8}$

$\cancel{t_1=-4}$

$t_2=2=e^{2x}$

$x=\frac{\ln 2}{2}$

$f'(x)=4e^{4x}+4e^{2x}$

$f'\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=4e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}=16+8=24.$

$y=-2$ ger $x=0$

$f'(0)=8.$

$$\int_{-2}^{3} g''(y)\,dy=\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1-3}{24}=-\frac{1}{12}.$$

Svar: $\underline{\underline{-\frac{1}{12}}}$.