

Fö 10 | Lös 4-6.

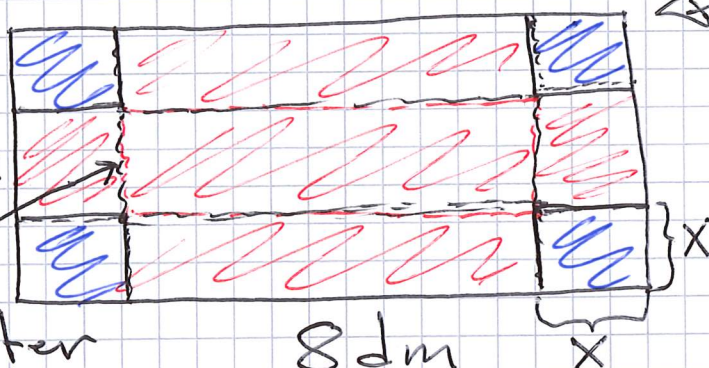
Tillämpningar av derivata.

Ex. Konstruktion.

Bygg öppen rätvinklig låda.

Plåt
 $8 \times 5 \text{ dm}$

5 dm

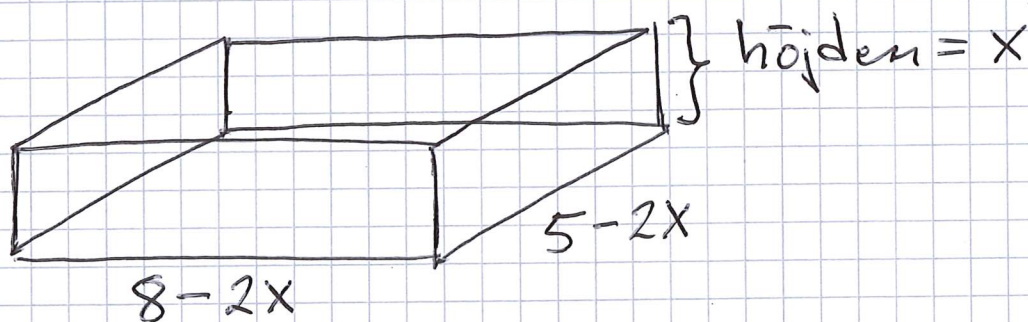


Klipp
bort 4 st
kvadrater.

$V = \text{volymen}$.

Vik ihop efter
linjerna.

Bestäm det x som ger $V_{\max}$.



$$V(x) = (8-2x)(5-2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

$$D_V = \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

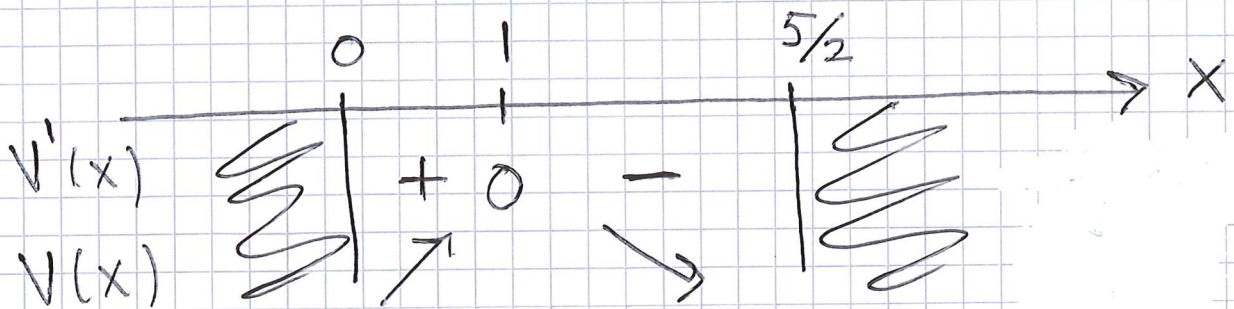
kontinuerlig
funktion

D_V Kompakt.

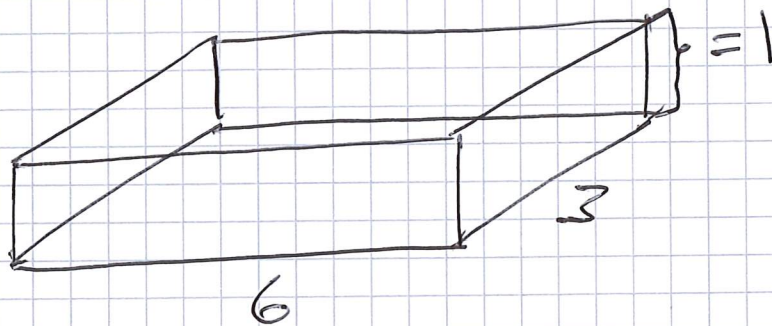
dvs. slutet och begränsad.

$$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x, \quad 0 \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x^2 - 13x + 10) = \\ &= 4(x-1)(3x-10) = 0 \end{aligned}$$



$x=1$ ger V :s största värde.

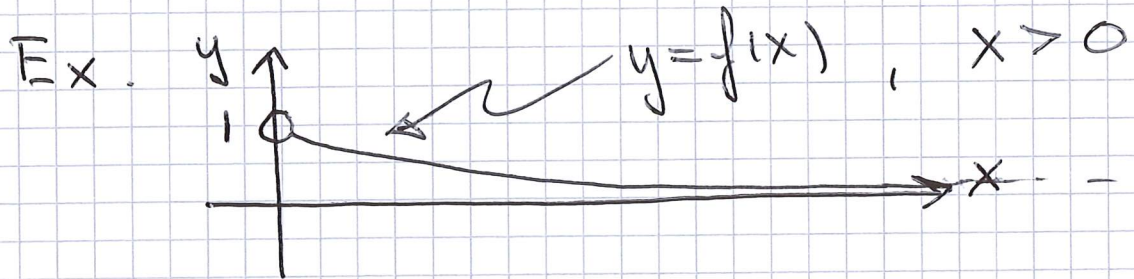


Svar: $x=1$ ger $V_{\max}$

$$V(1) = 18 \text{ dm}^3$$

Största / minsta värde

Existensen ??



Ex. $f(x) = e^{-x} \cos x$, $-\pi \leq x \leq \pi$

f kontinuerlig på kompakt område.

Största och minsta värde
existerar.

Sök där 1. $f'(x)=0$

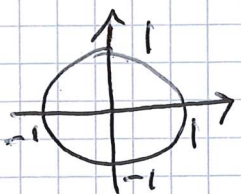
Aspiranter. 2. f' ej existerar

3. intervallets
ändpunkter

Sök $f_{\max}$ och $f_{\min}$ (globala).

L: $f'(x) = -e^{-x} \cos x + e^{-x}(-\sin x) =$

$-e^{-x}(\cos x + \sin x) =$ /hjälpvinkel-
metoden/



$$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x) = \frac{\text{Bryt ut}}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$= -e^{-x}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) =$$

$$= -\sqrt{2}e^{-x}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) =$$

$$= -\sqrt{2}\underbrace{e^{-x}}_{>0}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad ?$$

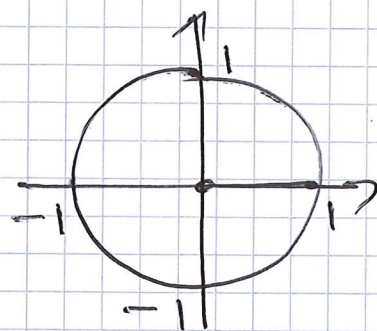
$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = n\pi,$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n=0, 1$$

$$\text{där } -\pi \leq x \leq \pi.$$

Aspiranter

$$y = e^{-x}\cos x$$



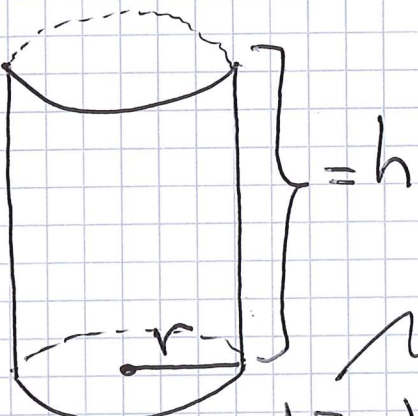
x	y
$-\pi$	$-e^{\pi}$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4} = \text{Största värdet.}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3\pi/4}$
π	$-e^{-\pi}$

$$\text{Minsta värde} = -e^{\pi}$$

Optimering.

Ex. Cylinderformad konserveburk
Maximera volymen under
given begränsningsarea.

L:


$$V = \pi r^2 h$$
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

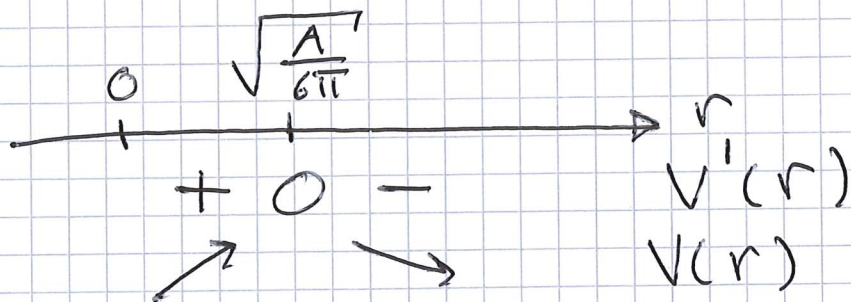
A given, $A = \text{konstant}$.

lös ut h och
sätt in

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} \right)$$

$$V(r) = \frac{Ar}{2} - \pi r^3, \quad r > 0$$

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$$



$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \quad \text{ger} \quad V_{\max.}$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \Leftrightarrow A = 6\pi r^2$$

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 6\pi r^2$$

$$2\pi r h = 4\pi r^2, \quad r > 0$$

$$h = 2r$$

höjden = diametern

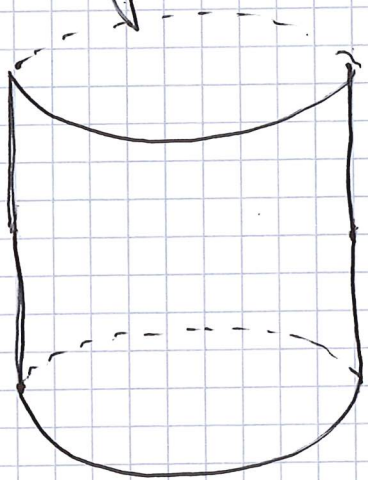
ger optimal lösning.

i meningar

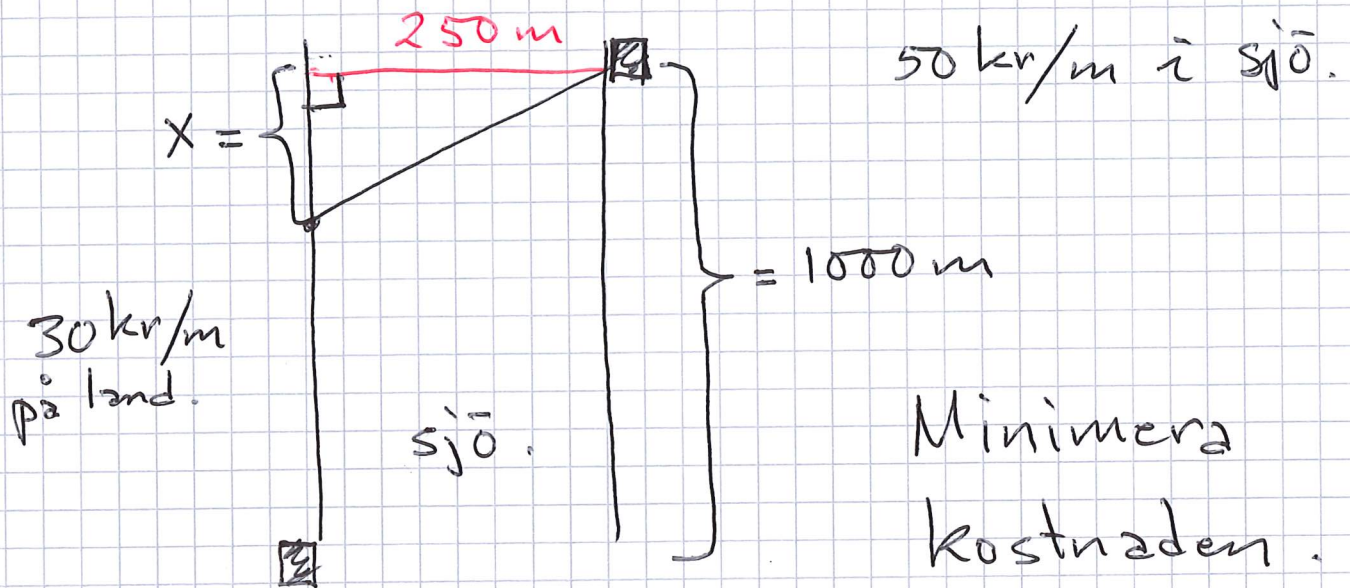
maximal volym

under given

begränsningsarea.



Ex. Kabel dragning.



$$K(x) = (1000 - x) \cdot 30 + \sqrt{250^2 + x^2} \cdot 50$$

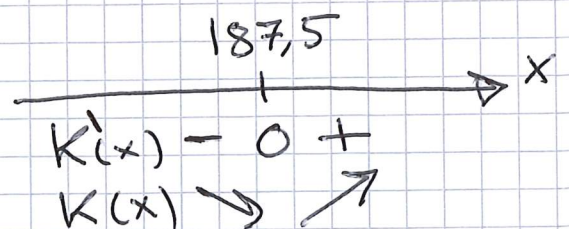
där $0 \leq x \leq 1000$.

$$K'(x) = -30 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{250^2 + x^2}} \cdot 50 = 0?$$

$$\Leftrightarrow 30 = \frac{50x}{\sqrt{250^2 + x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{250^2 + x^2} = \frac{5}{3}x$$

$$\Leftrightarrow 250^2 + x^2 = \frac{25x^2}{9} \Leftrightarrow \frac{16x^2}{9} = 250^2$$

$$x^2 = \frac{9 \cdot 250^2}{16}$$



Svar: $x = \frac{3 \cdot 250}{4} = 187,5$ ger $K_{\min}$.

Derivator av högre ordning.

y'' mäter f' 's förändring.

$$y = f(x)$$

Ex. $s = f(t) = \text{l\ddot{a}ge}.$
 $s' = \text{hastighet}.$
 $s'' = \text{acceleration}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{df}{dx} = Dy$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y = y''$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'')$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}(y''')$$

derivaten av ordning n - $y^{(n)}(x)$.

Ex. $y = \arctan x$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$y'' = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Ex. $f(x) = e^{3x}$

Bestäm $f^{(n)}(x)$.

L: $f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

$$f''(x) = 3^2 e^{3x}$$

$$f'''(x) = 3^3 e^{3x}$$

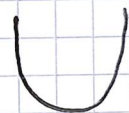
$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}, \quad n \text{ heltal } n > 0.$$

Sats: Givet. f deriverbar i en omgivning av en punkt a

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) \text{ existerar.}$$

Då gäller att



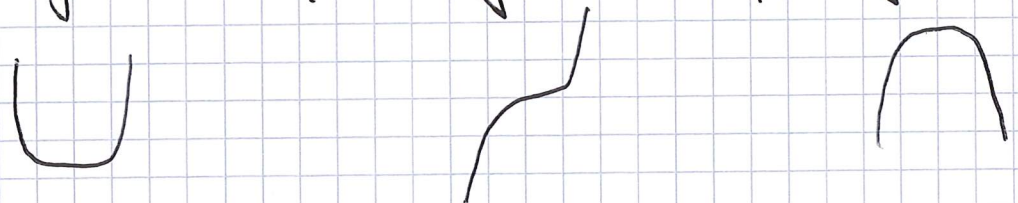
$f''(a) > 0 \Rightarrow f$ har lokalt min. i a

$f''(a) < 0 \Rightarrow f$ har lokalt max. i a .



obs! om $f'(a)=0$ och $f''(a)=0$
vet vi ingenting.

Ex. $y=x^4$, $y=x^3$, $y=-x^4$



Ex. Här $f(x) = x \sin(2x+x^2)$ lokalt
extremvärde för $x=0$?

L:

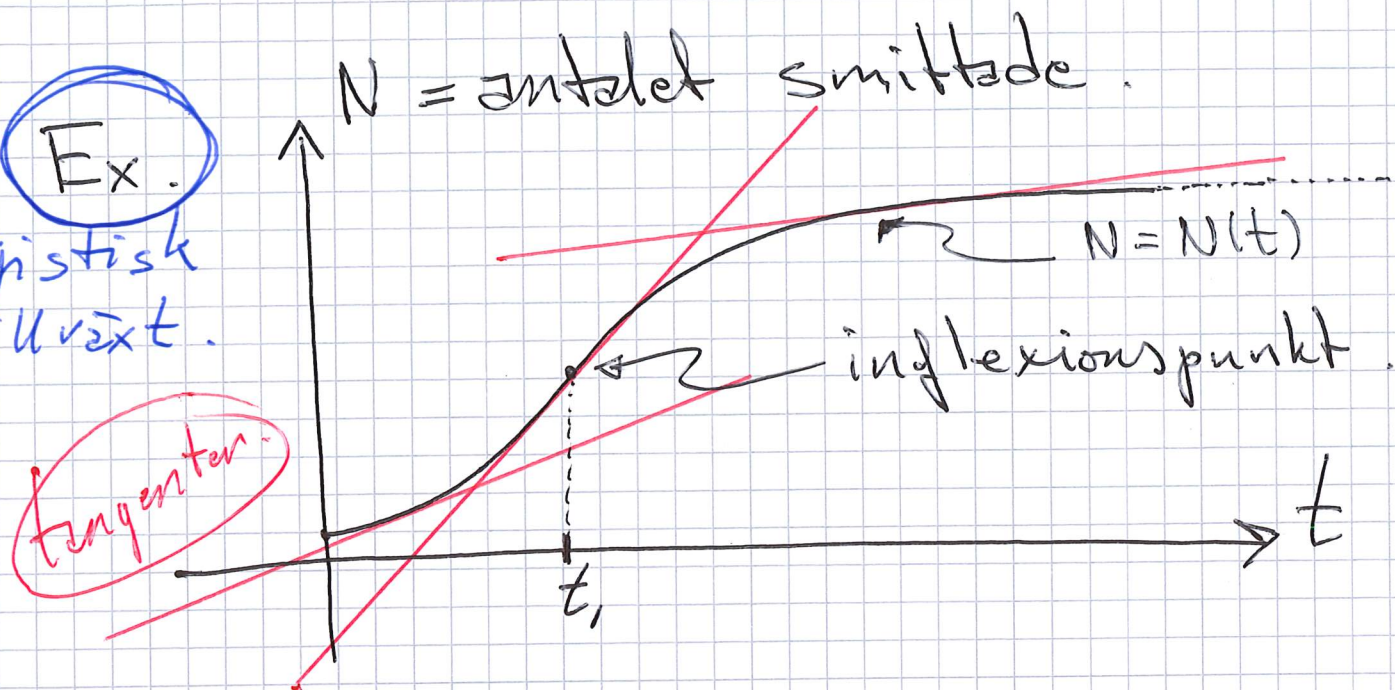
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sin(2x+x^2) + x \cos(2x+x^2) \cdot (2+2x) = \\ &= \sin(2x+x^2) + (2x+2x^2) \cos(2x+x^2) \end{aligned}$$

$$f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2+2x) \cos(2x+x^2) + (2+4x) \cos(2x+x^2) + \\ &+ (2x+2x^2)(2+2x)(-\sin(2x+x^2)) \end{aligned}$$

$f''(0) = 4$ ger tillsammans att
 f har lokalt minimum i $x=0$.

Ex.
logistisk
tillväxt.



N' = smitthastigheten
(smittspridningen).

När är N' som störst?

Sök där $N'' = 0$.

Vid $t = t_1$ är N' som störst.

N' = tangentens "k-värde".
lutning.

$N = f(t)$ är konvex för $0 \leq t \leq t_1$,
ökande N'

och konkav för $t \geq t_1$,
minskande N'