

"Flenvarre"

# Föll

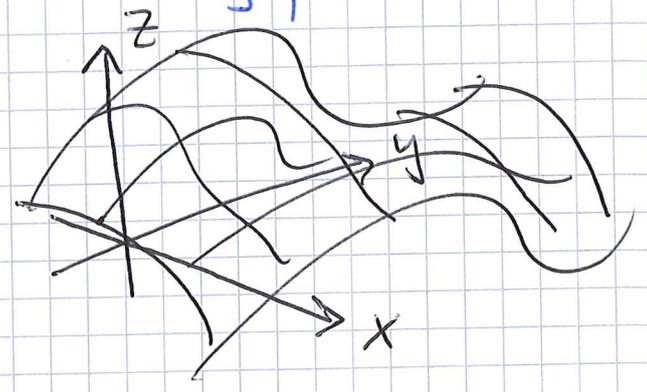
## Partiella derivator

Ej på tentan.

$$z = f(x, y)$$

$$z'_x = \frac{\partial}{\partial x} (f(x, y))$$

y konstant.



$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

p.s.s.  $z'_y = \frac{\partial}{\partial y} (f(x, y))$

x konstant.

Ex. Räkna ut de partiella första-derivatorna av

$$z = x^2y - 2x + y^2 - 5x^2y^2$$

L:  $z'_x = 2xy - 2 - 10xy^2$

$$z'_y = x^2 + 2y - 10x^2y$$

$$\text{Ex. } u = \ln(x^2y + zx + y^2)$$

$$u = f(x, y, z)$$

$$D \ln|x| = \frac{1}{x}$$

$$u'_x = \frac{1}{x^2y + zx + y^2} \cdot (2xy + z)$$

y och z konstant.

$$u'_y = \frac{1}{x^2y + zx + y^2} \cdot (x^2 + 2y)$$

$$u'_z = \frac{x}{x^2y + zx + y^2}$$

$$\text{Ex. } f(x, y) = \frac{2x + y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x + y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2(x^2 + y^2) - (2x + y)2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

Kvotregeln.

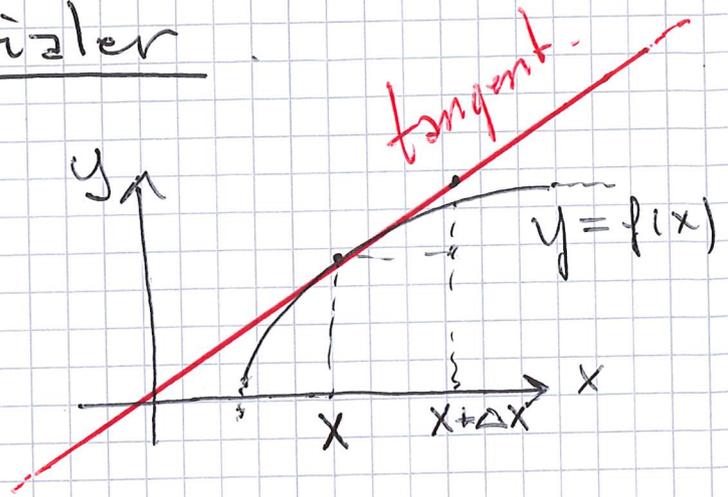
$$D\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p'q - pq'}{q^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

# Differentiäl

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$



$$dy = f'(x) dx \approx \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

differentiäl approximerar differeñsen.

---

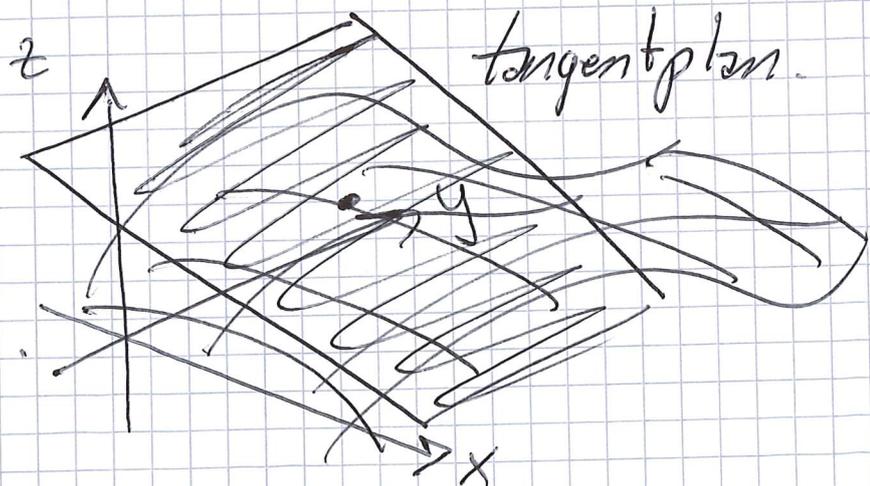
$$z = f(x, y)$$

$$dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

approximeras med  $dz$ .

Används  
t.ex vid  
fel uppskattning.



# Fler tillämpningar av derivata.

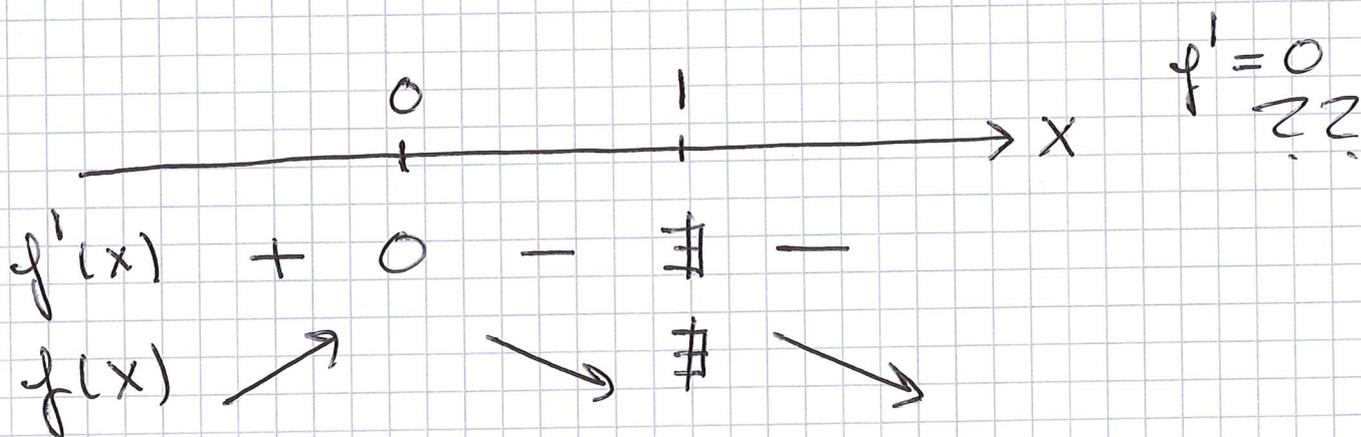
"typiska tentatel"

Ex. Rita  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2\arctan x$

L:  $x \neq 1$ .

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} + 2 \frac{1}{1+x^2} =$$

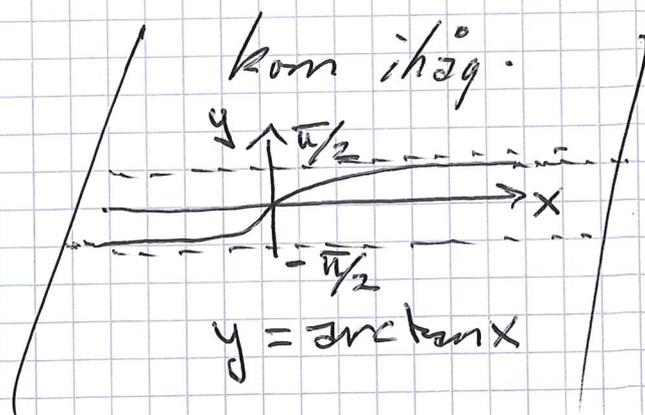
$$= \frac{-2(1+x^2) + 2(x-1)^2}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{-4x}{(x-1)^2(1+x^2)}$$



Värdetabell

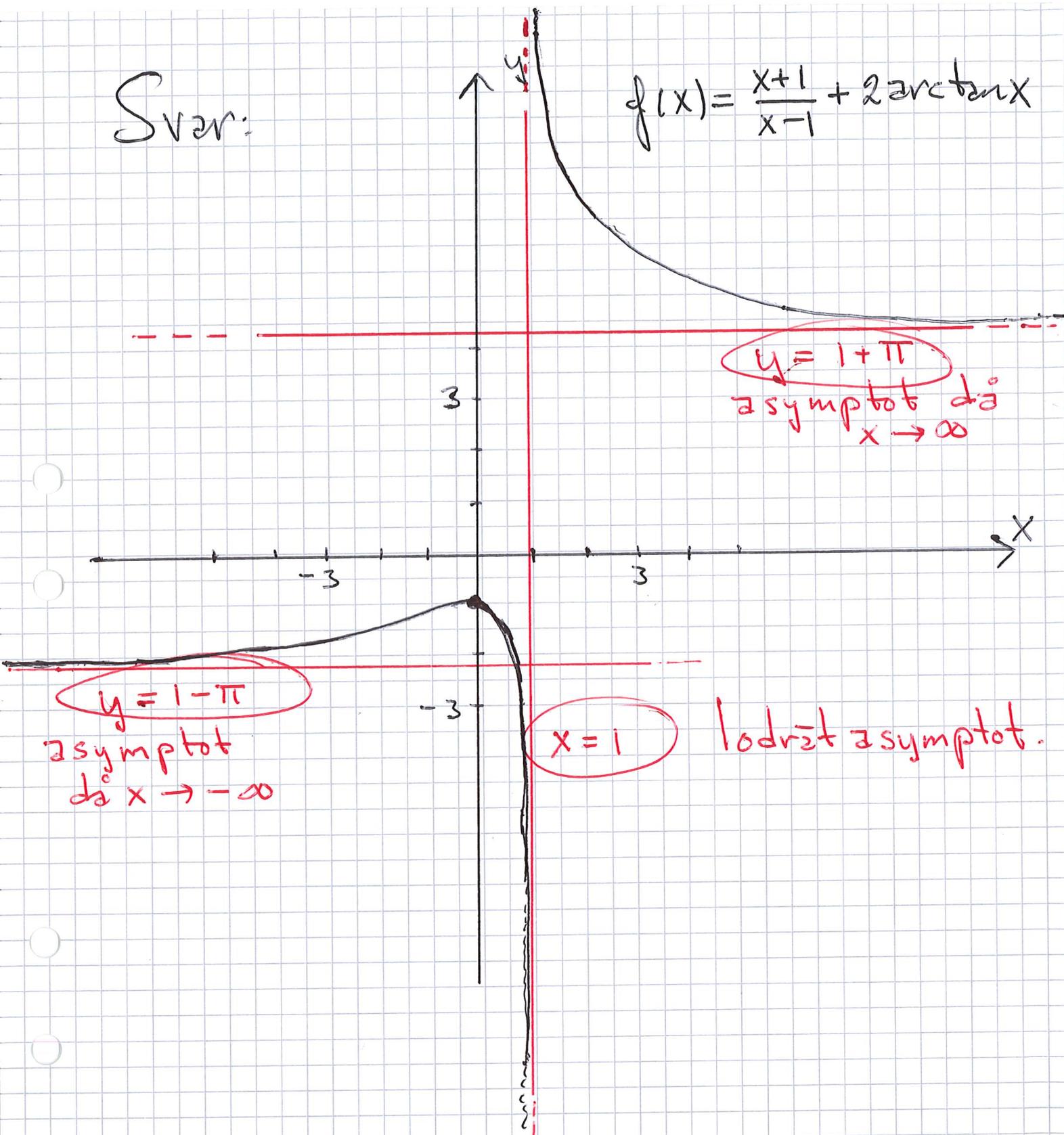
| x                | y       |
|------------------|---------|
| 0                | -1      |
| → 1 <sup>-</sup> | → -∞    |
| → 1 <sup>+</sup> | → ∞     |
| → ∞              | → 1 + π |
| → -∞             | → 1 - π |

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2\arctan x$$



Svar:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x$$



lokalt maximum i  $(0, -1)$

Största / minsta värde saknas.

Ex. Bestäm antalet reella  
rötter till ekvationen

$$\frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x = -2$$

Svar: 2 st.

---

Ex. Bestäm antalet reella  
rötter till ekvationen

$$\frac{x+1}{x-1} + 2 \arctan x = k$$

för olika värden på  $k$ .

Svar:  $k > 1 + \pi \Rightarrow 1$  rot

$-1 < k \leq 1 + \pi \Rightarrow$  lösning saknas

$k = -1 \Rightarrow 1$  rot

$1 - \pi < k < -1 \Rightarrow 2$  rötter

$k \leq 1 - \pi \Rightarrow 1$  rot.

Ex. Visa att  $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$  då  $x > 0$

$$L: \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \iff$$

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$$

Bilda  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$  och

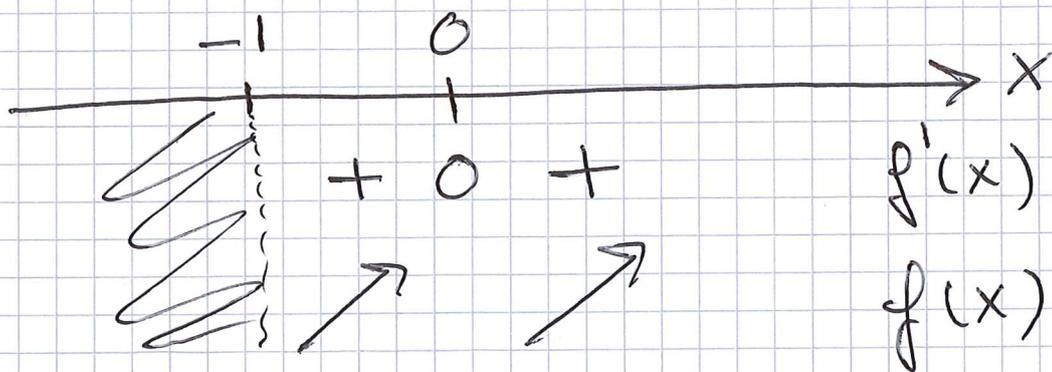
visa att  $f > 0$  för  $x > 0$ .

obs!  $x > -1$  utgör  $D_f$ .

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} =$$

$$= \frac{x^2}{1+x}$$

$$f' = 0 \quad ??$$



$$f(0) = \ln 1 - 0 + \frac{0^2}{2} = 0$$

$f$  kontinuerlig. \*

$\therefore f > 0$   
för  $x > 0$   
v.s.v

**Tentamen i Analys i en variabel del 1, utbildningskod TAIU10,  
modul TEN1. 2020-08-17, kl 8.00 – 13.00**

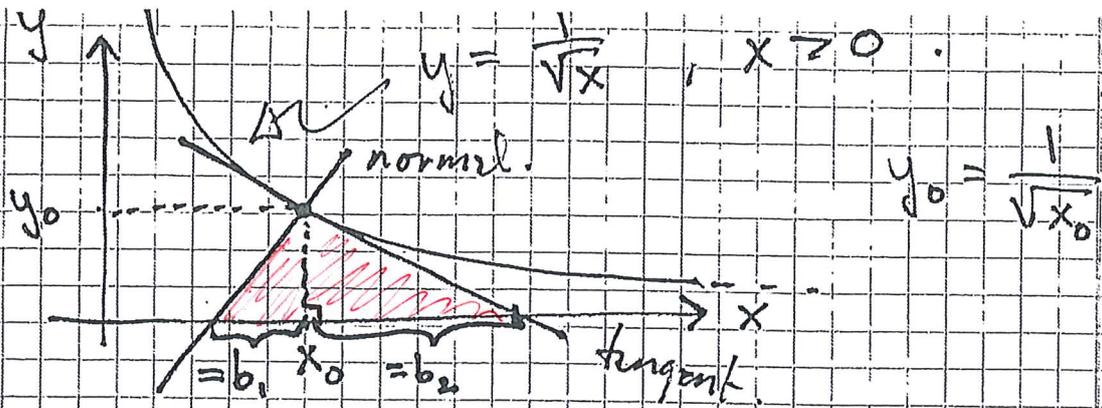
Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva får användas. Formelsamlingar och andra hjälpmedel är ej tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0 – 3 poäng. För betyg  $n$  ( $n = 3, 4$  eller  $5$ ) krävs minst  $4(n-1)$  poäng. Godkänd dugga 1 och dugga 2 ger vardera 1 p. Observera att bonus enbart gäller för betyget 3. Skriv på omslaget hur många bonuspoäng ( $B=0, B=1$  eller  $B=2$ ) du har.

---

- 1) Rita grafen till funktionen  $f(x) = (x^3 - 2)e^{3x}$ . Ange lokala extrempunkter, största och minsta värde samt ev. asymptoter.
- 2)
  - a. Lös ekvationen  $\ln(x + 2) + \ln(x - 3) = \ln(x + 9)$ . (2p)
  - b. Visa att man kan bestämma konstanten  $a$  så att polynomet
$$p(x) = x^4 + ax + 4$$
är delbart med  $x^2 - 2x + 2$ . Bestäm därefter alla nollställen till  $p(x)$  för detta värde på  $a$ . (1p)
- 3) Avgör om följande gränsvärden existerar och bestäm i så fall deras värden
  - a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 5x + 4}$
  - b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \sqrt{4x^2 + x} - \ln x)$
  - c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 10x}$ .
- 4) En låda utan lock, med kvadratisk bottenyta, ska ha begränsningsytan  $27 \text{ dm}^2$ . Bestäm lådans maximala volym.
- 5) Hur många rötter har ekvationen  $2x + 3 \ln x = 10 \arctan x$  för  $x > 0$ ?
- 6)
  - a. Antag att  $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$  för  $x \neq 0$ . Undersök om man kan definiera  $f(0)$  så att  $f$  blir kontinuerlig i  $x = 0$ . (1p)
  - b. Antag att  $f(x) = x^2 \arctan \frac{1}{x} + 2x$  för  $x \neq 0$  och att  $f(0) = 0$ . Undersök om  $f'(0)$  existerar. (2p)
- 7) Genom en punkt  $(x, y)$  på kurvan  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$  dras tangenten och normalen till kurvan. Dessa begränsar tillsammans med  $x$ -axeln en triangel med arean  $A(x)$ . Bestäm största och minsta värde av  $A(x)$  (om dessa existerar).

7.



$$y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$y'(x_0) = \frac{-1}{2x_0\sqrt{x_0}}$$

tangentens  
Steigung.

$$\frac{y_0}{b_2} = \frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}} \Leftrightarrow b_2 = 2x_0$$

$$\text{Normalens Steigung} = \frac{1}{y'(x_0)} = 2x_0\sqrt{x_0}$$

$$\frac{y_0}{b_1} = 2x_0\sqrt{x_0} \Leftrightarrow b_1 = \frac{1}{2x_0^2}$$

$$A(x_0) = \frac{\left(2x_0 + \frac{1}{2x_0^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}}}{2} = \sqrt{x_0} + \frac{1}{4x_0^{5/2}}$$

$$A'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} - \frac{5}{8} \frac{1}{x_0^{7/2}} = 0$$

$$x_0^3 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \text{ per } A_{\min}.$$

$A_{\max}$  schlies.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

A' - 0 +  
A ↘ ↗ → ∞

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right) = \frac{6}{5} \sqrt[6]{\frac{5}{4}}$$