

Fö2

Polynomekvationer

Def: Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$n \in \mathbb{N}$

Om $a_n \neq 0$ så är $\text{grad } p(z) = n$

Ex.

$$p_1(z) = 5z^3 - iz^2 + (1-i)z + 2$$

3:e grads polynom

$$p_2(z) = 7z^4 - z^3 + 2z^2 - 1$$

reella koef. grad 4

$$p_3(z) = 7 \quad \text{grad } 0$$

Rep: Faktorsatsen

$$p(\alpha) = 0 \iff (z - \alpha) \text{ ingår som faktor i } p(z)$$

dvs α nollställe till $p(z)$

Ex. Faktorisera $x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 6x - 20$

L: $p(x) = x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 6x - 20$

Gissa nollställe.

1 är nollställe. Faktorsatsen ger att $(x-1)$ ingår som faktor.

$$x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 6x - 20 = (x-1)(\quad?) =$$

$$= (x-1)(x^3 + 4x^2 + 14x + 20) = (x-1)(x+2)(x^2 + 2x + 10)$$

↑
-2 nollställe.
 $(x - (-2))$ faktor.

? fås genom polynomdivision

 liggande stolen

$$x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 - 1 + 10 = (x+1)^2 + 9 > 0.$$

Svar: $(x-1)(x+2)(x^2 + 2x + 10)$

faktorisering i reella faktorer.

Ex. Faktorisera $\underbrace{z^4 + 3z^3 + 10z^2 + 6z - 20}_{= p(z)}$

$$L: p(z) = (z-1)(z+2)(z^2 + 2z + 10) = \\ = (z-1)(z+2)(z+1-3i)(z+1+3i)$$

$$\uparrow \\ z^2 + 2z + 10 = 0$$

$$(z+1)^2 - 1 + 10 = 0$$

$$(z+1)^2 = -9$$

$$z = -1 \pm 3i$$

Påstående: Ett n -e grads polynom har n st nollställen förutsatt att komplexa nollställen räknas samt nollställena räknas med sin multiplicitet.

$$Ex. p(x) = (x+2)(x-1)^3(x^2+1)$$

Nollställen $-2, 1, 1, 1, +i, -i$

$$\text{grad } p = 6$$

Reella koefficienter.

Sats: Polynom $p(z)$

Alla koeff. reella $\Leftrightarrow$ p :s nollställen ligger komplexkonjugerade

Bevis: $p(\alpha) = 0$

$$p(\bar{\alpha}) = \bar{a}_n \bar{\alpha}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{\alpha} + \bar{a}_0 =$$

$$= \bar{a}_n \overline{\alpha^n} + \bar{a}_{n-1} \overline{\alpha^{n-1}} + \dots + \bar{a}_1 \bar{\alpha} + \bar{a}_0 =$$

$$= \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

$$\overline{\bar{z} \bar{w}} = \overline{\overline{zw}}$$

$$\overline{\bar{z} + \bar{w}} = \overline{\overline{z+w}}$$

V.S.V.

$$\bar{a}_i = a_i, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Ex. $z^2 + 2z + 10 = 0$

Se tidigare exempel.

Svar: $z_1 = -1 + 3i$

$$z_2 = -1 - 3i$$



Ex. Ekvationen $z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 8z + 10 = 0$

har roten $z_1 = -2 + i$

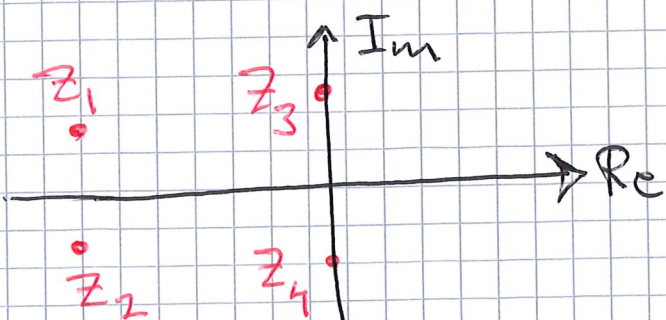
Lös ekv. fullständigt.

L: Reella koef. ger $z_2 = -2 - i$

$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + 4z + 5$ ingår
som faktor.

$$\begin{array}{r} z^2 + 2 \\ \hline z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 8z + 10 \quad | \quad z^2 + 4z + 5 \\ - (z^4 + 4z^3 + 5z^2) \\ \hline 2z^2 + 8z + 10 \\ - (2z^2 + 8z + 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

Svar: $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = -2 + i \\ z_2 = -2 - i \\ z_3 = i\sqrt{2} \\ z_4 = -i\sqrt{2} \end{array} \right.$



Ex. Lös ekv. $z^3 - 4z^2 + 9z - 10 = 0$

L: Gissa. $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 10 = 0$

2 är nollställe till $z^3 - 4z^2 + 9z - 10$

$\Leftrightarrow$
($z-2$) ingår som faktor.

$$z^3 - 4z^2 + 9z - 10 = (z-2)(\quad)$$

$$\begin{array}{r} z^2 - 2z + 5 \\ z^3 - 4z^2 + 9z - 10 \overline{) z-2} \\ -(z^3 - 2z^2) \\ \hline -2z^2 + 9z - 10 \\ -(-2z^2 + 4z) \\ \hline 5z - 10 \\ -(5z - 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$z = z^2 - 2z + 5$$

Ansl rötter?

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 &= 0 \\ (z-1)^2 - 1 + 5 &= 0 \\ (z-1)^2 &= -4 = 4i^2 \\ z-1 &= \pm 2i \\ z &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

Svar:

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = 1 + 2i$$

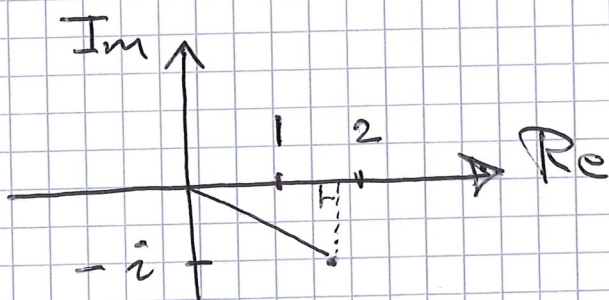
$$z_3 = 1 - 2i$$

Ex. Bestäm beloppet och ett argument för $z = \frac{\sqrt{3}-i}{(1-i)^3}$

L: $|z|$, $\arg z$ söks.

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{(1-i)^3} = \frac{2e^{i(-\pi/6)}}{(\sqrt{2}e^{i(-\pi/4)})^3}$$

Gå över till polär form.
 $/re^{i\theta}/$



$$\begin{aligned} z &= \frac{2e^{-i\pi/6}}{(\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(-\pi/6 - (-\frac{3\pi}{4}))} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(-\frac{2\pi}{12} + \frac{9\pi}{12})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$\text{Svar: } |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \arg z = \frac{7\pi}{12}$$

Ex. Lös ekv. $z^4 = 16i$

L. Binomisk ekvation.

Sätt $z = re^{i\theta}$

$$z^4 = 16i$$

$$(re^{i\theta})^4 = 16e^{i(\frac{\pi}{2} + k2\pi)}, \quad k \text{ heltal.}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r &\geq 0 \\ r &\text{ reellt.} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Svar: $z = 2e^{i(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})}$ där

$$k = 0, 1, 2, 3$$

(4 st rötter).

Ex. Ekv. $z^4 + 5z^3 + 9z^2 + 15z + 18 = 0$
har en rent imaginär rot.
Lös ekvationen.

L: $z_1 = ib$

Reella koef. $\Rightarrow z_2 = -ib$

(konjugerade nollställen)

$(z - ib)(z + ib) = z^2 + b^2$ ingår
som faktor. / Faktorsatsen /

ib rot.

$$(ib)^4 + 5(ib)^3 + 9(ib)^2 + 15(ib) + 18 = 0$$

$$b^4 - 5ib^3 - 9b^2 + 15ib + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 9b^2 + 18 = 0 & \text{Re-delen.} \\ -5b^3 + 15b = 0 & \text{Im-delen.} \end{cases}$$

$$5b(-b^2 + 3) = 0$$

$$b = \sqrt{3}$$

forts $\rightarrow$

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$$

$z^2 + 3$ ingår som faktor.

$$\begin{array}{r}
 z^2 + 5z + 6 \\
 \hline
 z^4 + 5z^3 + 9z^2 + 15z + 18 \quad \boxed{z^2 + 3} \\
 - (z^4 \quad + 3z^2) \\
 \hline
 5z^3 + 6z^2 + 15z + 18 \\
 - (5z^3 \quad + 15z) \\
 \hline
 6z^2 + 18 \\
 - (6z^2 + 18) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$z^2 + 5z + 6 = 0$$

$$z = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} z_1 = \sqrt{3}i \\ z_2 = -\sqrt{3}i \\ z_3 = -3 \\ z_4 = -2 \end{cases}$$

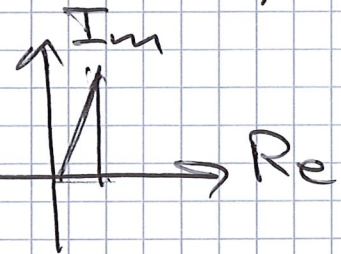
Ex. Beräkna $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^{10}$

Svara på formen $a+ib$.

L: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right)^{10} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \right)^{10} =$

Rita alltid.

komplexa talplanet.



$$= \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^{10} = 32 e^{i\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= 32 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) =$$

$$= 32 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 16(-\sqrt{3} + i)$$

Svar: $-16\sqrt{3} + 16i$
