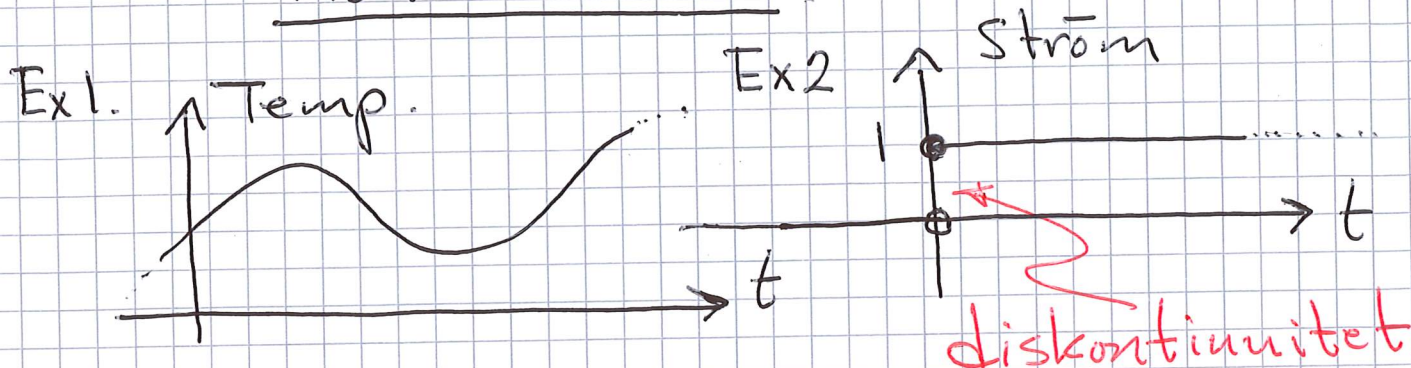


F07 | Läs 3.3-3.4

Kontinuitet

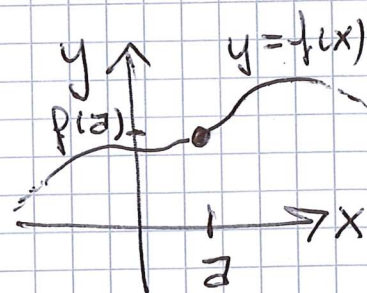


Def: Kontinuitet i en punkt.

$y = f(x)$ är kontinuerlig i punkten
 $(a, f(a))$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

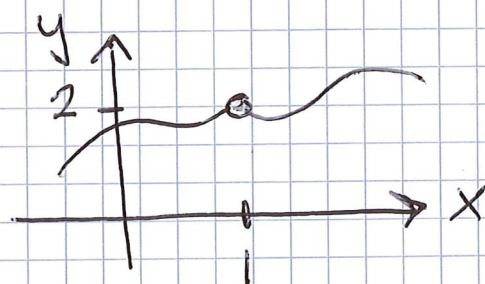


givet: f definierad i punkten a
och D_f innehåller punkter
godtyckligt nära a .

Ex. Bestäm A så att $f(x)$
blir kontinuerlig i punkten
 $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} & , x \neq 1 \\ A & , x = 1 \end{cases}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1) = 2$$

$$f \text{ kont. i } x=1 \Leftrightarrow f(1) = 2$$

$$\therefore A = 2$$

$$\text{Svar: } A = 2$$

Ex. Är $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & , x \geq 1 \\ & x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$

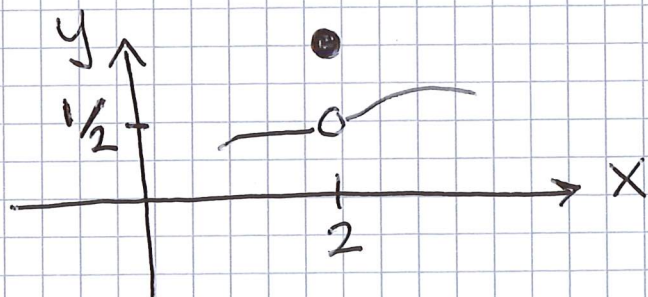
kontinuerlig i $x=2$?

L: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \left[\text{typ} \left[\frac{0}{0} \right] \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2} \neq \underbrace{f(2)}_{=1}$$



Svar: Nej
se ovan.

Kontinuerlig funktion

Def: f är kontinuerlig om f är kont. i varje punkt i sin definitionsmängd.

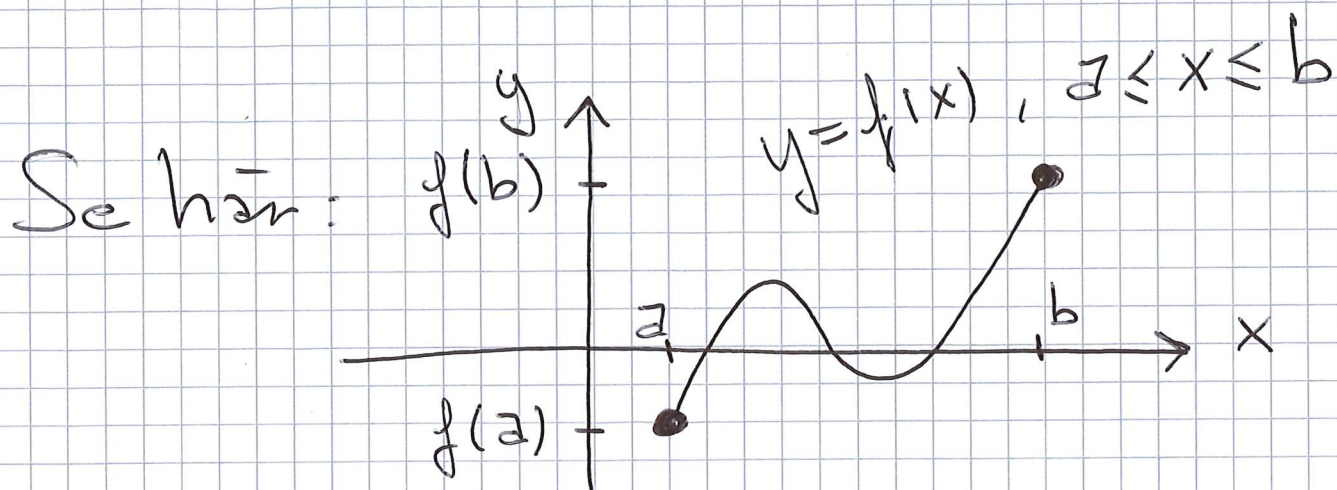
Sats: Elementära funktioner och dess sammansättningar är kontinuerliga där de är definierade. sammanhängande

2 st viktiga satsen.

Givet $y = f(x)$, $D_f = [a, b]$
 f kontinuerlig.

① Då antar $f(x)$ varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ minst en gång.

② f antar ett största och ett minsta värde.



men bevis är svårt.

Ex. Bestäm antalet reella rötter till ekv. $x^5 + 2\arctan x = 2$

L: $x^5 + 2\arctan x = 2$

obs!
ej lös.

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^5 + 2\arctan x - 2}_{= f(x)} = 0$$

= $f(x)$ kontinuerlig.

$$f(0) = 0^5 + 2\arctan 0 - 2 = -2 < 0$$

$$f(1) = 1^5 + 2\underbrace{\arctan 1}_{= \pi/4} - 2 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

Minst en reell rot.



f strängt växande.

Svar: Exakt en reell rot. i $]0, 1[$

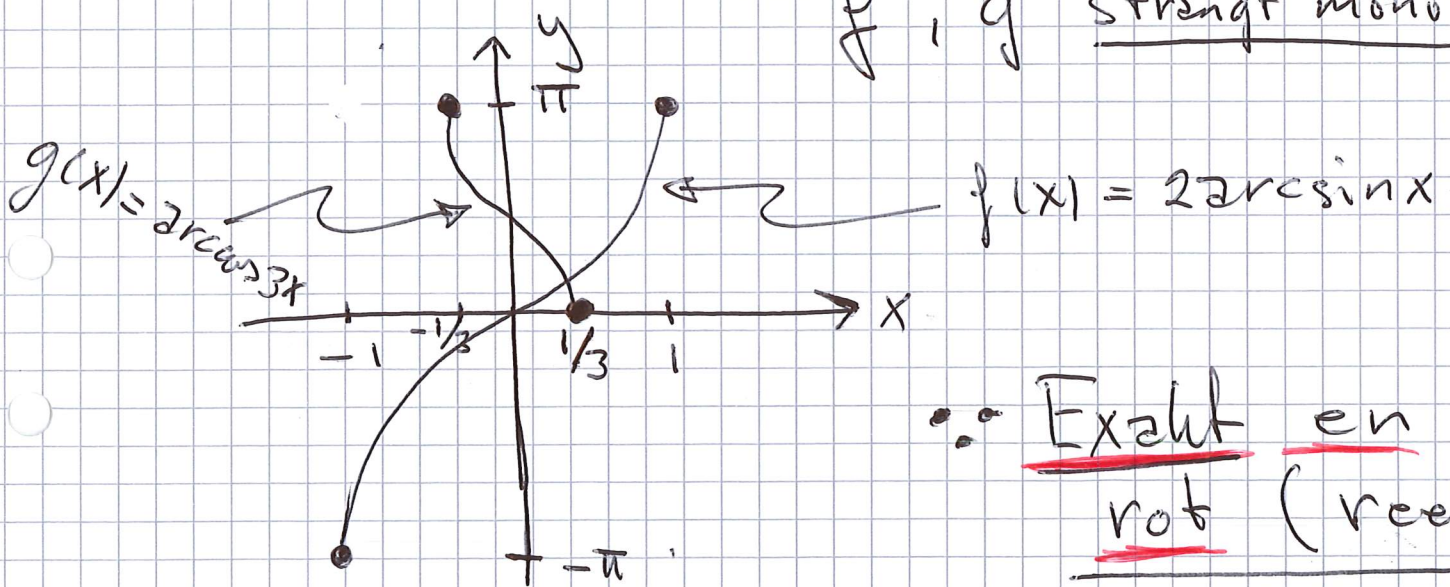
Ex. Lös ekv. $2\arcsin x = \arccos 3x$.

L. Först. Antal lösningar?

Bilda $f(x) = 2\arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$
 $g(x) = \arccos 3x$, $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

f, g kontinuerliga } $\Rightarrow$ Minst en
rot.
enligt satsen
om mellanliggande
värden.

f, g strängt monotona



$\therefore$ Exakt en
rot (reell).

Hitta roten! (exakt)

Svarare.

(öv.) :

$$x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$$

Standardgränsvärden

$$\ln x \ll x^\alpha \ll a^x$$

$\xrightarrow{\infty}$ långsamt.
 $\xrightarrow{\infty}$ medel $\alpha > 0$
 $\xrightarrow{\infty}$ snabbt. $a > 1$

$\text{då } x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Bevis: $0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\beta \ln x}{\beta x^\alpha} = \frac{\ln x^\beta}{\beta x^\alpha} < \frac{\ln x}{\beta x^\alpha}$

$\uparrow$ $x > 1$ $\uparrow$ $0 < \beta < \alpha$ $\uparrow$ $\ln x < x$ $x > 10$ t.ex

$$< \frac{x^\beta}{\beta x^\alpha} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-\beta}} \rightarrow 0$$

$\text{då } x \rightarrow \infty$
 ständ. ändligt. $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

Bevis: $\frac{x^\alpha}{a^x} = e^{\ln\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right)} = e^{\alpha \ln x - x \ln a} \xrightarrow{-\infty} e = 0$

$\text{då } x \rightarrow \infty$ $a > 1$

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2^x + \ln x}{3^x + x^2 - 100} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \left(\frac{x^5}{2^x} - 1 + \frac{\ln x}{2^x} \right)}{3^x \left(1 + \frac{x^2}{3^x} - \frac{100}{3^x} \right)} =$

Bryt ut dominerande faktor.

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x \cdot \frac{\left(\frac{x^5}{3^x} - 1 + \frac{\ln x}{2^x} \right)}{\left(1 + \frac{x^2}{3^x} - \frac{100}{3^x} \right)} = 0$

$\left(\frac{2}{3} \right)^x \rightarrow 0$

$\text{d.s. } x \rightarrow \infty$

$\rightarrow -1$ enligt
standardgränsvärden

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{2^x} = 0 \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ 2 > 1 \end{matrix}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

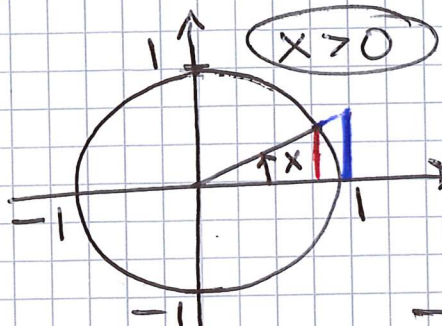
Svar: 0

Fler standardgränsvärden

s145
i boken.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Se här:



$$\sin x < x < \tan x$$

$\Leftrightarrow$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

da $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Bevis: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left/ \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ x = \ln(1+t) \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right/ =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} =$$

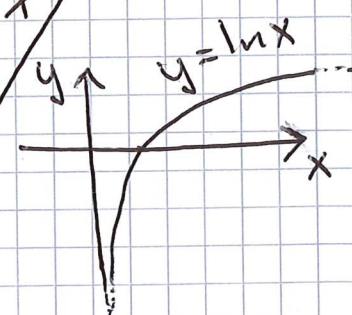
$$= \frac{1}{1} = 1 \quad \text{v.s.b.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Bevis: $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} =$
 $= e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \xrightarrow{\text{da } x \rightarrow 0} e^1 = e$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \quad \alpha > 0$$

Bevis: $x^\alpha \ln x = \frac{t = \ln x}{x \rightarrow 0^+ \quad t \rightarrow -\infty}$



$= (e^t)^\alpha t = \frac{t}{e^{-\alpha t}} \rightarrow 0$ da $t \rightarrow -\infty$.
 $(\alpha > 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Ex. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

L: jfr $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\frac{\sin 3x}{x} = \left/ \begin{array}{l} t = 3x \\ x = \frac{t}{3} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right/ = \frac{\sin t}{\frac{t}{3}} =$$

$$= 3 \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 3 \cdot 1 = 3 \quad \text{då } t \rightarrow 0.$$

Alt. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) \cdot 3 = 3$

Skriv vad du vill ha.
Kompensera.

Svar: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$



$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x^2}{x \ln(1+3x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x^2}{5x^2} \cdot \frac{5x^2}{x \frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 5x^2}{5x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}} \right) \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$\xrightarrow{\quad} 1$
 $\xrightarrow{\quad} 1$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$$

$$\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$$

enligt standardgränsvärden.
då $x \rightarrow 0$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$L: \text{ jfr } (1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e \text{ då } x \rightarrow 0.$$

$$(1+5x^2)^{\frac{1}{x}} = \left((1+5x^2)^{\frac{1}{5x^2}} \right)^{5x} \rightarrow e^0 = 1$$

Skriv vad du vill ha
kompensera.

$$\text{då } x \rightarrow 0$$

Svar: Gr.v = 1

Ex. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$

L: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2} = \left/ \begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ x = t + \frac{\pi}{2} \end{array} \right/ =$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} =$

$= -1$

jfr standardgrv. $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(5+x) - \ln x)$

log. lag nr 2.

L: $x(\ln(5+x) - \ln x) \stackrel{\downarrow}{=} x \ln \frac{5+x}{x} =$

$= x \ln(1 + \frac{5}{x}) = \left/ \begin{array}{l} t = \frac{5}{x} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right/ =$

$= \frac{5}{t} \ln(1+t) = 5 \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 5 \cdot 1 = 5$

Svar: Gr.v = 5. $\frac{d}{dt} t \rightarrow 0$