

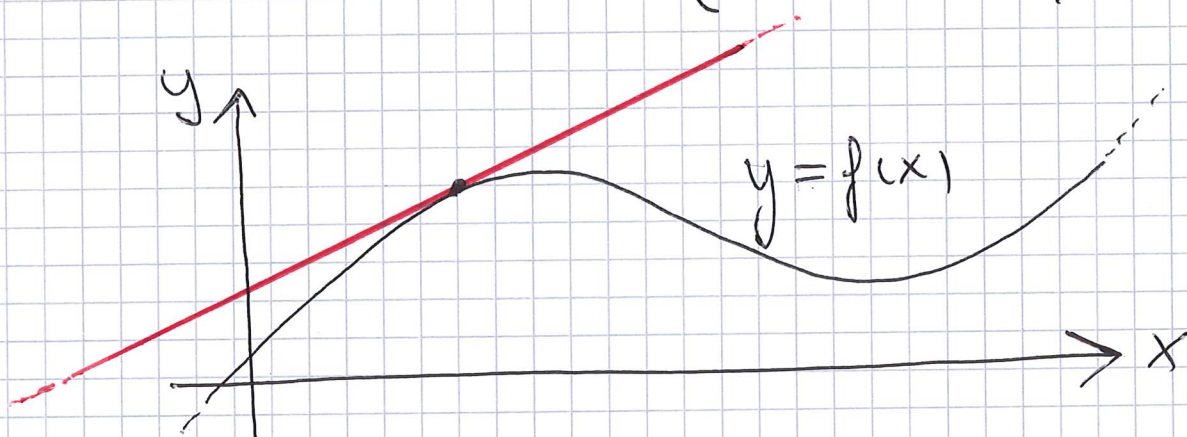
Fö 9

Läs 4.4-4.5.

Användning av derivata.

f' mäter f 's förändring

f' är tangentens lutning.
(k-värde)



Sats: f deriverbar på ett intervall I .

$f' > 0$ för alla $x \in I \Rightarrow f$ strängt väx.
på I .

$f' < 0$ för alla $x \in I \Rightarrow f$ strängt avtagande
på I .

$f' = 0$ för alla $x \in I \Rightarrow f$ är konstant på I

Punkter där $f'(x) = 0$ kallas
stationära punkter.

Ex. $f(x) = x^3 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestäm de intervall där f är
strängt växande eller avtagande?

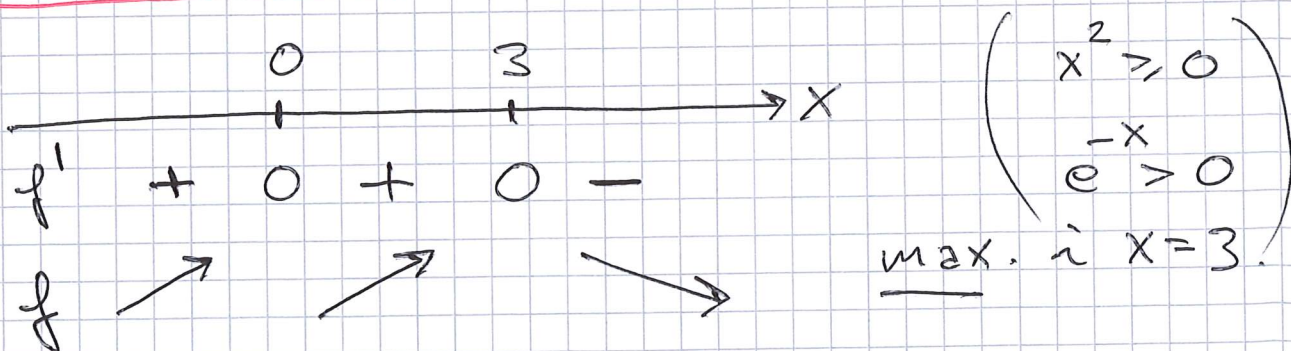
Extrempunkter?
max/min.

L: $f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x} \cdot (-1) = x^2 e^{-x} (3-x)$

Sök faktorerad
form.

$f' = 0 \quad x = 0, 3$

Gör teckenstudie av f'



Svar: f strängt väx. på $]-\infty, 3]$
 f strängt avt. på $[3, \infty[$

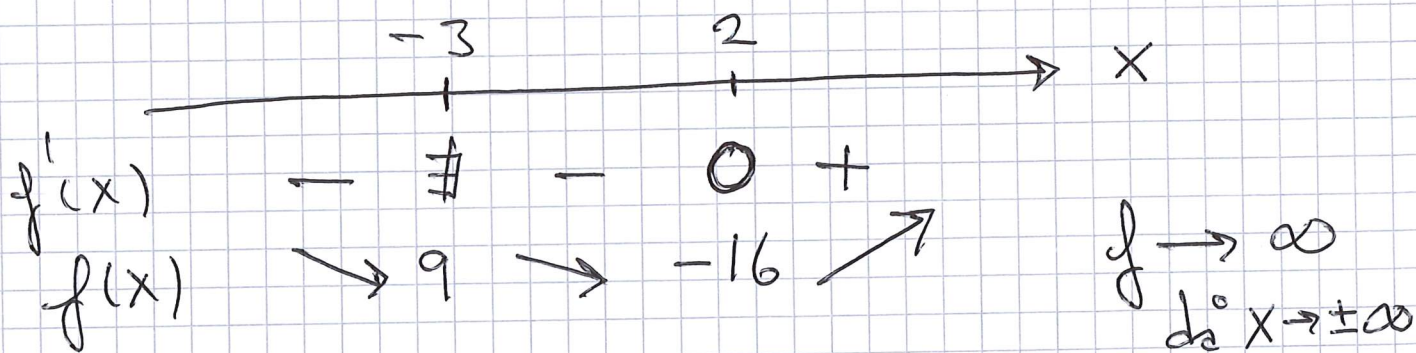
Ex. $f(x) = x^2 - 4|x+3|$
 $\sqrt{2}x / \text{aut. ?}$

L: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4(x+3) = x^2 - 4x - 12, & x \geq -3 \\ x^2 + 4(x+3) = x^2 + 4x + 12, & x < -3 \end{cases}$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \in x \geq -3 \\ 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \notin x < -3 \end{cases}$$



$$f'_+(-3) = -10 \neq f'_-(-3) = -2$$

$f'(-3)$
existerar ej.

lokalt (globalt)
min. i $(2, -16)$.

Svar: f strängt avtagande för $x \leq 2$.
 f strängt växande för $x \geq 2$.

Ex.

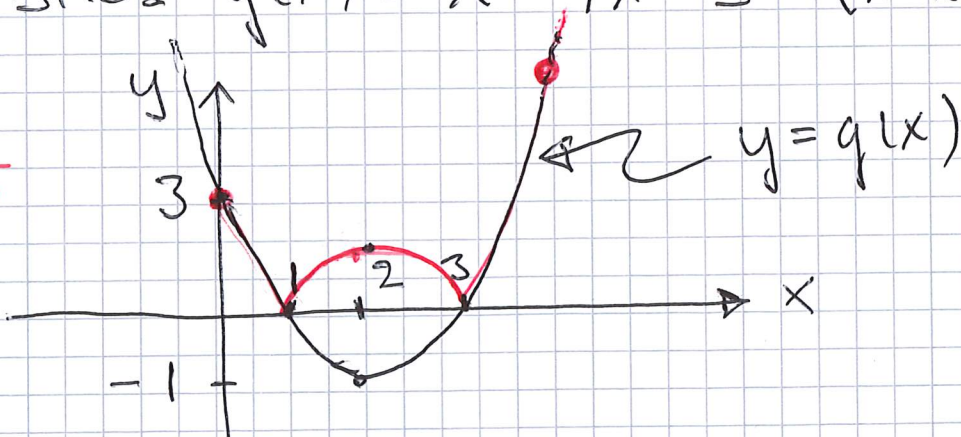
$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|, \quad 0 \leq x \leq 5$$

Sök ev. extrempunkter.

Svar: L: Bilda $g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$

max. i
 $x = 0, 2, 5$

min. i
 $x = 1, 3$



Kurvritning.

Ex. Rita $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x}$

- L: {
- ① Bestäm Df.
 - ② Teckenstudie av $f'(x)$
 - ③ Gör värdetabell.
inklusive intressanta
gränsvärden.
 - ④ Ev. asymptoter?
 - ⑤ Rita.
- ↑
2mk
50% hä.

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$f'(x) = \frac{-2e^{-2x}x - e^{-2x} \cdot 1}{x^2} = -e^{-2x} \cdot \frac{2x+1}{x^2}$$

↑
kvotregeln.

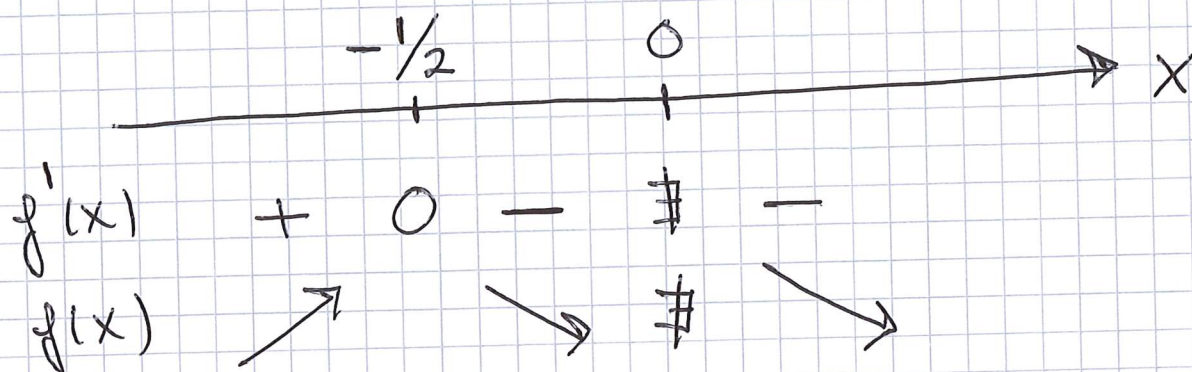
↑
Sök faktoriserad
form

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

När är $f' = 0$?

$$f'(x) = - \underbrace{e^{-2x}}_{>0} \frac{2x+1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$



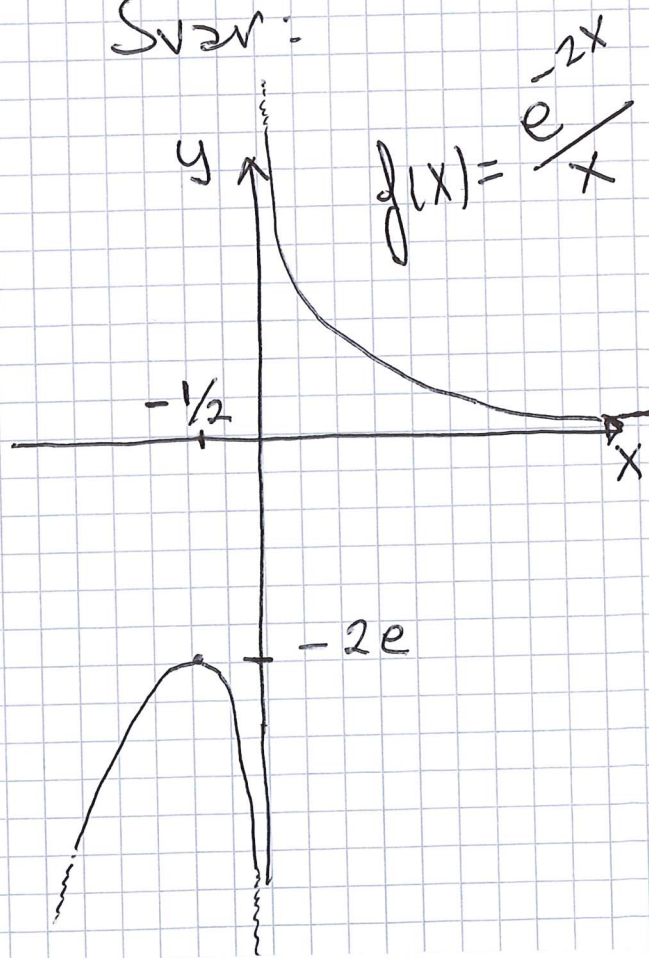
Värde tabell

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{x} = \frac{1}{xe^{2x}}$$

x	y
$-\frac{1}{2}$	$-2e$
$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow -\infty$
$\rightarrow 0^+$	$\rightarrow \infty$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$
$\rightarrow -\infty$	$\rightarrow -\infty$

$y=0$ asymptot då $x \rightarrow \infty$
 $x=0$ lodrät asymptot.

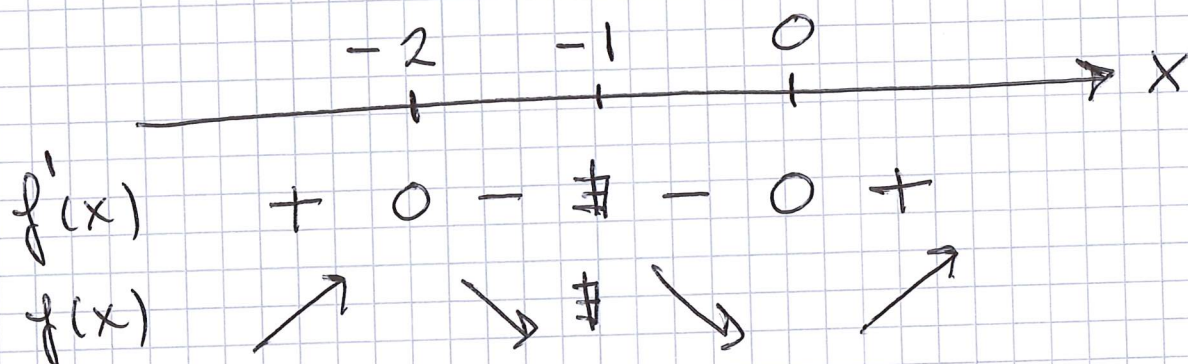
Svar:



Ex. Rita $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$L: x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$



Vändetabell.

x	y
-2	-4
0	0
$\rightarrow -1^-$	$\rightarrow -\infty$
$\rightarrow -1^+$	$\rightarrow \infty$
$x \rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
$x \rightarrow -\infty$	$\rightarrow -\infty$

$$y = \frac{x^2}{x+1} = X-1 + \frac{1}{x+1}$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2 \overline{) x^2 + x} \\ \underline{-(x^2 + x)} \\ -x \\ \underline{-(-x - 1)} \\ 1 \end{array}$$

$$y = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

$y = x-1$ asymptot.
da $x \rightarrow \pm \infty$.

$\rightarrow 0$
da $x \rightarrow \pm \infty$.

Svar:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

lokalt
asymptot.

$$x = -1$$

asymptot
do
 $x \rightarrow \pm \infty$

lokalt maximum
i $(-2, -4)$

lokalt minimum
i $(0, 0)$

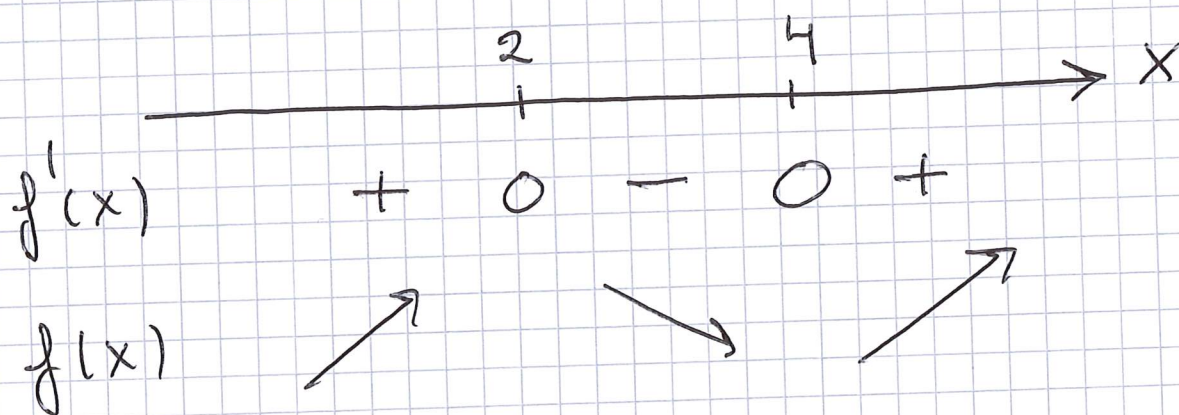
Största/minsta
värde saknas.

Problem där vi tänker kurvskiss.

Ex. Bestäm antal reella nollställen till $x^3 - 9x^2 + 24x - 15$

L: Bilda $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = \\ &= 3(x-2)(x-4) \end{aligned}$$



$$f(4) = 64 - 144 + 96 - 15 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 15) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{15}{x^3} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

f kontinuerlig.

Svar: Exakt ett reellt nollställe.

Ex. För vilka x gäller olikheten

$$\ln x > 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \quad ?$$

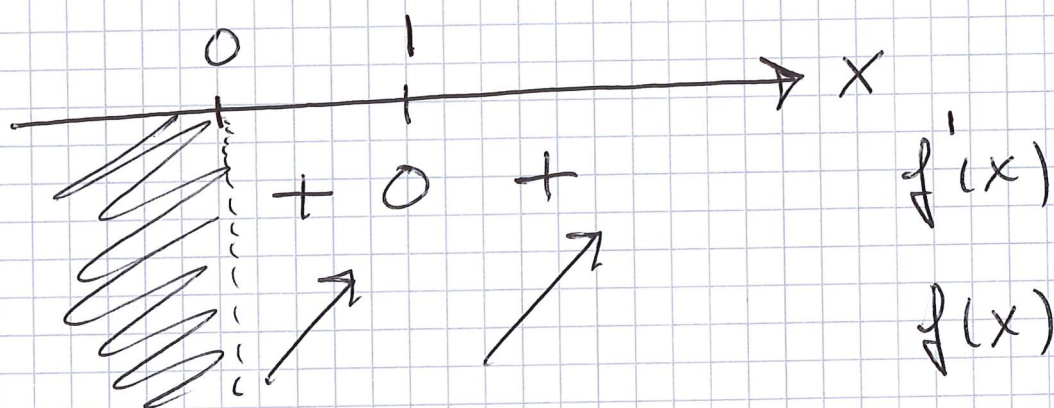
"noll på
en sidan"

$$L: \Leftrightarrow \ln x - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} > 0$$

Bilda $f(x) = \ln x - 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$

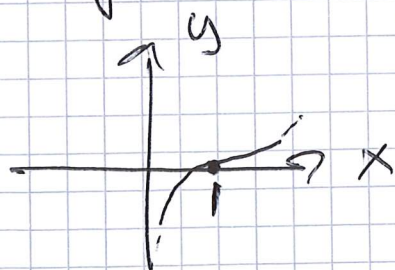
obs! $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 + x = \frac{1 - 2x + x^2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$$



$$f(1) = \ln 1 - 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

f kont. för $x > 0$.



$$\text{Svar: } x > 1$$

Ex. Bestäm antalet olika reella
rötter till ekvationen $e^{-2x} = kx$
för olika värden på k .

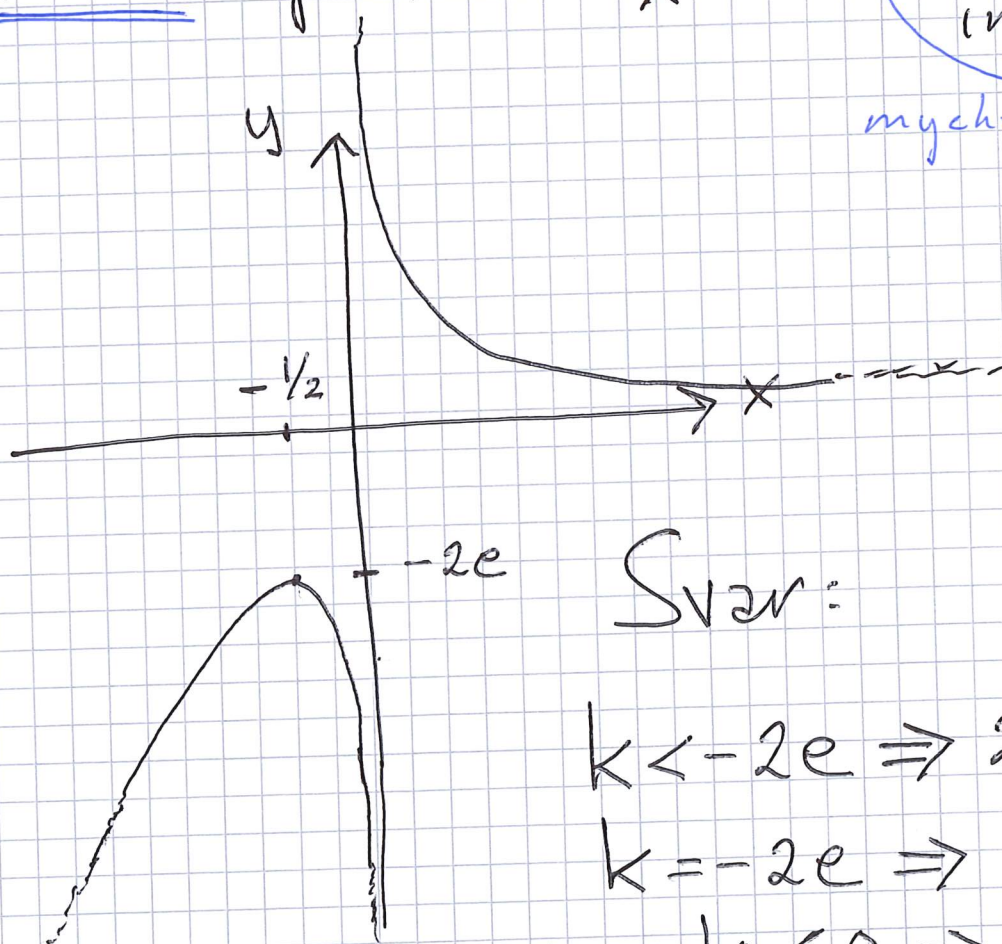
$$L: e^{-2x} = kx, \quad x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-2x}}{x} = k$$

Rita $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x}$

Se video
innan.

mycket jobb



Svar:

$$k < -2e \Rightarrow 2 \text{ rötter}$$

$$k = -2e \Rightarrow 1 \text{ rot}$$

$$-2e < k \leq 0 \Rightarrow \text{Ingen rot}$$

$$k > 0 \Rightarrow 1 \text{ rot.}$$