Fö 10 | Läs 9.2 + 9.5.

Separabla differentialekvationer

Lös $g(y)\,y' = h(x)$, $y' = y'(x)$

L. $g(y)\dfrac{dy}{dx} = h(x)$

$$g(y)\,dy = h(x)\,dx$$

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

$$G(y) = H(x) + C$$

y implicit given

Försök lös ut y explicit.

Ex. Lös $y' = y^2$

$y = y(x)$.

L. $y' = y^2$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \iff dy = y^2\,dx$$

$$\iff \frac{1}{y^2}\,dy = dx$$

$y \neq 0$

obs!

Kontrollera denna sist.

*

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

"nytt C"

$$\frac{1}{y} = -x - C \,, \quad -C = C$$

$$\frac{1}{y} = C - x$$

$$y = \frac{1}{C-x} \,, \quad x \neq C \,.$$

* samt $y = 0$.

Svar: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{C-x} \,, & x > C \\ y = \dfrac{1}{C-x} \,, & x < C \end{cases} \,, \quad y = 0 \quad x \in \mathbb{R}.$

Ex. Lös $\begin{cases} y' = (y^2-1)x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

L. $y' = (y^2-1)x$

$$\frac{dy}{dx} = (y^2-1)x$$

$$\frac{1}{y^2-1}\,dy = x\,dx \quad , \quad y \neq \pm 1$$

obs!

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int x\,dx$$

$$\int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1} \right) dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|y-1| - \ln|y+1| \right) = \frac{x^2}{2} + C$$

$y(0)=0$ ger $\frac{1}{2}\left(\underbrace{\ln|-1|}_{=\ln 1 = 0} - \ln|0| \right) = 0 + C$

$$\Longrightarrow \quad C = 0$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x^2$$

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{x^2}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = (\pm) e^{x^2}$$ $y(0)=0$ ger $(+)$ "+ bort".

$$y-1 = -e^{x^2}(y+1)$$

$$y + e^{x^2} y = 1 - e^{x^2}$$

$$y(1+e^{x^2}) = 1 - e^{x^2}$$

$$y = \frac{1-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

Svar: $y = \dfrac{1-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}$

Ex.

En dag i vintras snöade det med konstant hastighet under ett antal timmar. Kl. 12.00 startade en plogbil som höll jämnt tempo, d.v.s. varje minut plogade den undan lika mycket snö. Den första milen tog 20 minuter och den andra 30 minuter.

När på dagen började det snöa? (Vägbanan får antas fri från snö, då snöfallet började).

L: Antag att det började snöa T minuter före kl 12^{00}.
Plogbilen har kört x mil t minuter efter kl 12^{00}.

$$\underbrace{x'(t)}_{\text{plogbilens hastighet}} = \frac{k}{t+T}, \quad k = \text{konstant.}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{t+T}$$

$$\int 1\,dx = \int \frac{k}{t+T}\,dt$$

$$x(t) = x = k \ln|t+T| + C$$

givet: $x(20) = 1$ ger $1 = k\ln|20+T| + C$

$x(50) = 2$ ger $2 = k\ln|50+T| + C$

samt $x(0) = 0$ ger $0 = k\ln T + C$

vilket ger

$$\begin{cases} 1 = k \ln\left(\frac{20+T}{T}\right) & \cdots\cdots (1) \\ 2 = k \ln\left(\frac{50+T}{T}\right) & \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$\frac{(1)}{(2)}$ ger $\quad \frac{1}{2} = \frac{\ln\left(\frac{20+T}{T}\right)}{\ln\left(\frac{50+T}{T}\right)}$

$$\ln\left(\frac{50+T}{T}\right) = 2\ln\left(\frac{20+T}{T}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{50+T}{T} = \left(\frac{20+T}{T}\right)^2, \quad T \neq 0.$$

$$50T + T^2 = T^2 + 40T + 400$$

$$10T = 400$$

$$T = 40.$$

Svar: Klockan 11^{20} började det snöa.

Ex. Lös diff-ekv $xy' = y^2+1$, $x>0$
under bivillkoret $y(1)=1$.

L. $x\frac{dy}{dx} = y^2+1$

$$\frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{y^2+1}dy = \int\frac{1}{x}dx$$

$$\arctan y = \ln x + C$$

$y(1)=1$ ger $\arctan 1 = \ln 1 + C$

$$\frac{\pi}{4} = C$$

$$\arctan y = \ln x + \frac{\pi}{4}$$

$$y = \tan\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\pi/2 < \ln x + \frac{\pi}{4} < \pi/2$$

$$-\frac{3\pi}{4} < \ln x < \pi/4$$

$$e^{-3\pi/4} < x < e^{\pi/4}.$$

Svar: $\underline{\underline{y = \tan\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)}}$

Ex.

Reaktionsformeln $H_2 + I_2 \to 2HI$ beskriver hur vätejodid bildas när väte och jod reagerar med varandra vid ett kemiskt försök. Det åtgår alltså en mol väte och en mol jod för att bilda 2 mol vätejodid. Låt y mol/liter beteckna den vätekoncentration som omvandlats vid tiden t och låt a mol beteckna vätekoncentrationen vid tiden $t = 0$ och b mol beteckna jodkoncentrationen vid tiden $t = 0$. Antag, vidare att reaktionshastigheten $\frac{dy}{dt}$ är proportionell mot produkten av de återstående koncentrationerna av väte och jod. (Vi antar att $a < b$).

Följande differentialekvation beskriver sambandet ovan.

$$\frac{dy}{dt} = k\,(a - y(t))\,(b - y(t)) \quad \text{där} \quad k > 0$$

Bestäm den allmänna lösningen $y = y(t)$ till differentialekvationen ovan.

Bestäm

$$\lim_{t\to\infty} y(t)\,.$$

Vilken slutsats drar du av detta resultat? Hur mycket vätejodid har bildats efter två timmar om vätekoncentrationen efter 1 timme är 0.004 mol/liter under förutsättning att $a = 0.01$ mol/liter, $b = 0.02$ mol/liter.

L. $$\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y)$$

$$\int \frac{1}{(a-y)(b-y)}\,dy = \int k\,dt$$

PBU ger

$$\int \left(\frac{A}{a-y} + \frac{B}{b-y}\right) dy = \int k\,dt \qquad A = \frac{1}{b-a}, \quad B = \frac{-1}{b-a}$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{\ln|a-y|}{-1} + \ln|b-y|\right) = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{b-y}{a-y}\right| = (b-a)kt + C$$

nytt C

$$\frac{b-y}{a-y} = e^{(b-a)kt + c}$$

$$\frac{b-y}{a-y} = e^{(b-a)kt} \cdot \underbrace{e^{c}}_{=C}$$

ny tt C.

$$b-y = (a-y)Ce^{(b-a)kt}$$

$$y = \frac{aCe^{(b-a)kt} - b}{Ce^{(b-a)kt} - 1}$$

$y(0) = 0$ ger $0 = \dfrac{aC - b}{C-1}$

$$C = \frac{b}{a}.$$

Svar:

$$y(t) = \frac{b\left(e^{(b-a)kt} - 1\right)}{\frac{b}{a}e^{(b-a)kt} - 1} \longrightarrow a$$

då $t \to \infty$

$(b > a)$.

T L 8.22. Lös differentialekvationerna och ange lösningens definitionsmängd.

a) $yy' = -x$ b) $y' = y^2$ c) $y' = \dfrac{3y-1}{x}$

d) $y' = e^{x+y}$ e) $\dfrac{dx}{dt} = e^x \sin t$ f) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

8.23. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2 y \dfrac{dy}{dx} = 1 + x^2$ för vilken $y(2) = 2$.

L 8.24. Lös differentialekvationerna

a) $xy' + y^2 = 1$ b) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 2$

8.25. Antag att x_0 bakterier placeras i en näringslösning vid tiden $t = 0$ och låt $x(t)$ vara antalet bakterier vid tiden t. Om mat och levnadsutrymme är obegränsat kommer, som en följd härav, populationen vid varje tidpunkt att öka med en fart proportionell mot antalet bakterier. Bestäm antalet bakterier som en funktion av tiden.

8.26. Om föda och utrymme istället hålls vid en konstant nivå kommer konkurrensen att verka på så vis att populationen stabiliserar sig och närmar sig den konstanta nivån x_1. Antag att populationen ökar med en fart som är proportionell mot $x(x_1 - x)$. Bestäm $x(t)$.

8.27. Då en kropp faller påverkas den dels av tyngdaccelerationen men också av en motriktad acceleration på grund av luftmotståndet. Antag att den totala accelerationen a har utseendet $a = g - cv^2$, där v är farten, g är tyngdaccelerationen och $c = k/m$ där m är kroppens massa och k är en konstant som beror av kroppens form. Om $v = v_0$ vid tiden $t = 0$, bestäm $v(t)$. Vilken blir gränshastigheten?

8.28. En kemisk reaktion av andra ordningen beskrivs av en differentialekvation av formen

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

där a, b och k är positiva konstanter. Finn den lösning för vilken $x(0) = 0$. Skilj på fallen $a \neq b$ och $a = b$.

8.29. En kemikalie löses i vatten med en hastighet som är proportionell mot produkten av den oupplösta mängden och differensen mellan koncentrationen i en mättad lösning och den aktuella lösningen. Man vet att i 100 ml mättad lösning är 50 g av kemikalien löst. Om 30 g av kemikalien rörs ner i 100 ml rent vatten så löses 10 g på 2 timmar. Hur mycket har lösts upp efter 5 timmar?

T 8.30. Bestäm alla kontinuerligt deriverbara funktioner y som uppfyller integralekvationen

a) $y(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x y(t)\,dt$ b) $y(x) = x + \displaystyle\int_0^x \frac{2t\,y(t)}{1+t^2}\,dt$

8.31. Lös integralekvationen $\displaystyle\int_0^x y(t)\,dt + (1+x^2)y(x) = 1$.

Ex. smittspridning.

$$y(t) = \text{antalet smittade}.$$

$$y'(t) = k\,y(t)\,(M - y(t))$$

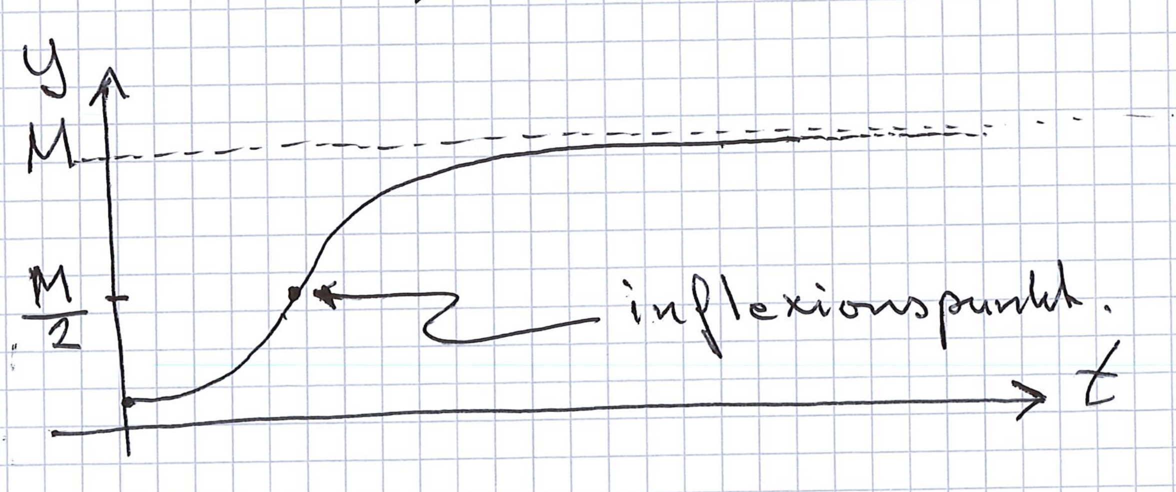
$$\int \frac{1}{y(M-y)}\,dy = \int k\,dt$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{M}}{y} + \frac{\frac{1}{M}}{M-y} \right) dy = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{M} \ln\left(\frac{y}{M-y} \right) = kt + C$$

$$\frac{y}{M-y} = e^{Mkt + MC} = e^{Mkt} \cdot \underbrace{e^{MC}}_{=C}$$

$$y = \frac{MCe^{Mkt}}{1 + Ce^{Mkt}}$$



9.5 Integralekvationer

Ex. $y(x)$ är kontinuerligt deriverbar.

Lös $y(x) = 1 + \int_2^x t\,y(t)\,dt$

L. I Derivera får ✱

/tänk såhär $\int_2^x \underbrace{t\,y(t)}_{=g(t)}\,dt = G(x) - G(2)$/

✱ $y'(x) = 0 + x\,y(x) - 0$

$y' - xy = 0$ /$i.f = e^{-\frac{x^2}{2}}$/

$y' e^{-\frac{x^2}{2}} - x e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0$

$\left(y e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = 0$

$y e^{-\frac{x^2}{2}} = C$

$y = C e^{\frac{x^2}{2}}$

$y(2) = 1$ ger $C = e^{-2}$.

Svar: $y = e^{\frac{x^2}{2} - 2}$

II. obs! Läs av villkor.

$x = 2$ ger

$y(2) = 1 + \underbrace{\int_2^2 t\,y(t)\,dt}_{=0}$

Ex. Lös integralekvationen

$$y(x) + \int_x^0 \frac{t\,y(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{1+x^2}$$

L. Derivera.

$$y'(x) + 0 - \frac{x\,y(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$y' - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$i.f = e^{\int -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx} = e^{-\sqrt{1+x^2}}$$

mult med i.f.

$$\underbrace{y' e^{-\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}} y}_{\text{derivatan av en produkt.}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}}$$

$$\left(y e^{-\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}}$$

$$y e^{-\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$y e^{-\sqrt{1+x^2}} = -e^{-\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$y = -1 + Ce^{\sqrt{1+x^2}}$$

Obs! Glöm inte läsa villkor.

$x=0$ ger

$$y(0) + \underbrace{\int_0^0 \frac{ty(t)}{\sqrt{1+t^2}} dt}_{=0} = \sqrt{1+0^2}$$

$y(0)=1$ ger

$$1 = -1 + Ce^{\sqrt{1+0^2}} \Rightarrow C = \frac{2}{e}$$

Svar: $y = -1 + 2e^{\sqrt{1+x^2}-1}$