Fö 11

2:a ordningens linjära diff. ekv. med konstanta koeff.

Läs 9.3–9.4.

Lös $y''(x) + ay'(x) + by(x) = h(x)$

Svar: $y = y_h + y_p$ där

y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekv.

$$(\; y'' + ay' + by = 0 \;)$$

och y_p är en lösning till

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

y_p s.k partikulär lösning.

Se boken sid 395.

Homogena ekvationens lösningar

Lös $y'' + ay' + by = 0$ $\quad *$

Sub. $y = ze^{rx}$ för något lämpligt r

$y = y(x)$, $z = z(x)$.

$$y' = z'e^{rx} + ze^{rx}r = (z' + rz)e^{rx}$$

$$y'' = (z'' + rz')e^{rx} + (z' + rz)e^{rx} \cdot r =$$

$$= (z'' + 2rz' + r^2 z)e^{rx}$$

insättning i $*$ ger

$$(z'' + 2rz' + r^2 z + a(z' + rz) + bz)e^{rx} = 0$$

$$z'' + (2r + a)z' + (r^2 + ar + b)z = 0$$

Bildar den s.k karakteristiska ekv.

K.E. $\quad r^2 + ar + b = 0$ $\quad$ rötterna r_1 och r_2.

$a, b \in \mathbb{R}$.

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) \Rightarrow a = -r_1 - r_2$$

Välj nu $r = r_1$

$$z'' + (2r_1 - r_1 - r_2)z' + 0 = 0$$

$$z'' + (r_1 - r_2)z' = 0$$

Sub. $z' = w$

$$w' + (r_1 - r_2)w = 0$$

$$/ \; i \cdot f = e^{(r_1 - r_2)x} \; /$$

$$w' e^{(r_1 - r_2)x} + (r_1 - r_2)e^{(r_1 - r_2)x} w = 0$$

$$\left(w e^{(r_1 - r_2)x}\right)' = 0$$

$$w e^{(r_1 - r_2)x} = C$$

Anteg.

$$z' = w = C e^{(r_2 - r_1)x}, \quad r_1 \neq r_2.$$

$$z = \frac{C}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + D$$

$$/ \; y = z e^{r_1 x} \; / \qquad C_1 = \frac{C}{r_2 - r_1}$$

$$y = C_1 e^{r_2 x} + D e^{r_1 x}$$

Om $r_1 = r_2$

$$z' = w = C$$

$$z = Cx + D$$

$$y = ze^{r_1 x} = (Cx + D)e^{r_1 x}$$

sist. fallet komplexa rötter
till K.E.

$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ "konjugerade".

$$y = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$$

se boken.
ex. 9.15.

Sammanfattningen på nästa sida lär vi oss utantill.

$$\boxed{\text{Lös } y'' + ay' + by = 0}$$

a, b reella tal.

Bilda K.E. $r^2 + ar + b = 0$

Om $r_1 \neq r_2$ och reella.

$$\boxed{y_h = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}}$$

Om $r_1 = r_2$ (dubbelrot).

$$\boxed{y_h = (Cx + D)e^{r_1 x}}$$

Komplexa rötter till K.E.

Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\boxed{y_h = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)}$$

Ex. Lös $y'' - 3y' + 2y = 0$

L: K.E. $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$\left(r-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0$$

$$\left(r-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$r-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}$$

$$r=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$$

Gör kontroll.

Svar: $y=Ce^{2x}+De^{x}$

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases}y''+2y'+y=0\\y(0)=1\\y'(0)=1\end{cases}$$

L: K.E. $r^2+2r+1=0$

$$r=-1\pm\sqrt{1-1}$$

$r_1=r_2=-1$ dubbelrot.

$$y_h=(Cx+D)e^{-x}$$

$$y = (Cx + D)e^{-x}$$

$$y' = Ce^{-x} + (Cx + D)e^{-x} \cdot (-1)$$

$y(0) = 1$ ger $D = 1$

$y'(0) = 1$ ger $C - 1 = 1 \Rightarrow C = 2$

Svar: $y = (2x + 1)e^{-x}$

Glöm inte kontroll!

Ex. Lös $y'' + 6y' + 25y = 0$

L: K.E. $r^2 + 6r + 25 = 0$

$$(r+3)^2 - 9 + 25 = 0$$

$$(r+3)^2 = -16 = 16i^2$$

$$r + 3 = \pm 4i$$

$$r = -3 \pm 4i$$

Svar: $y = e^{-3x}(C\cos 4x + D\sin 4x)$

Partikulärlösning, y_p

Sök y_p till $y'' + ay' + by = h(x)$

dvs finn <u>en</u> lösning.

I. $h(x)$ = polynom av grad n.

$b \neq 0$ Ansätt y_p = allmänt polynom av grad n.

$b = 0$, $a \neq 0$ Ansätt $y_p = (\text{—— " ——}) \cdot x$

extra x.

Ex. Lös differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 4y = 4x^2 - 4x + 6$$

L. 1. Sök y_h. $y'' + 2y' + 4y = 0$

K.E. $r^2 + 2r + 4 = 0$

$r = -1 \pm i\sqrt{3}$

$$y_h = e^{-x}(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x)$$

(2) Sök y_p.

$$y'' + 2y' + 4y = 4x^2 - 4x + 6$$

Sätt $y_p = ax^2 + bx + c$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$ insättning ger

$$2a + 2(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2 - 4x + 6$$

$$4ax^2 + (4a + 4b)x + (2a + 2b + 4c) = H.L.$$

identifiering:

$$\begin{array}{lll} x^2: & 4a = 4 & \\ x: & 4a + 4b = -4 & \Leftrightarrow \\ x^0: & 2a + 2b + 4c = 6 & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{array}$$

$$y_p = x^2 - 2x + 2$$

$$y = y_h + y_p$$

Svar: $y = e^{-x}(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x) + x^2 - 2x + 2$

II. $h(x) = (\text{polynom av grad } n)\, e^{kx}$

Gör först sub. $y = ze^{kx}$

Ex. Lös $y'' + 2y' - 3y = xe^{-3x}$

L: Sök först y_h.

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

K.E. $r^2 + 2r - 3 = 0 \iff \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -3 \end{cases}$

$$y_h = Ce^{x} + De^{-3x}$$

Sök y_p. $y'' + 2y' - 3y = xe^{-3x}$ *

Sub. $y = ze^{-3x}$, $z = z(x)$.

$$y' = z'e^{-3x} + ze^{-3x}(-3) = (z' - 3z)e^{-3x}$$

$$y'' = (z'' - 3z')e^{-3x} + (z' - 3z)e^{-3x} \cdot (-3) =$$

$$= (z'' - 6z' + 9z)\, e^{-3x}$$

insättning i * ger

$$(z'' - 6z' + 9z + 2(z' - 3z) - 3z)\, e^{-3x} = xe^{-3x}$$

$$z'' - 4z' = x$$

Obs! endast partikulärlösning söks.

Ansätt $\quad z_p = (ax+b)x = ax^2 + bx$

$$z_p' = 2ax + b$$

$$z_p'' = 2a \qquad \text{insättning ger}$$

$$2a - 4(2ax+b) = x$$

$$-8ax + 2a - 4b = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8a = 1 \\ 2a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$z_p = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x$$

$$y = ze^{-3x} \quad , \quad y_p = \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{-3x}$$

Svar: $y = Ce^{x} + De^{-3x} + \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{-3x}$

III.

$$h(x) = \begin{cases} C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{cases}$$

Om $i\beta$ ej rot till K.E.

Ansätt: $y_p = A\sin\beta x + B\cos\beta x$

Om $i\beta$ rot till K.E.

Ansätt $y_p = (A\sin\beta x + B\cos\beta x)\cdot x$

"extra x"

Ex. Lös $y'' - y' - 2y = \sin 2x$

L. y_h $\quad r^2 - r - 2 = 0$

$r_1 = -1 \;;\; r_2 = 2$

$y_h = Ce^{-x} + De^{2x}$

y_p Ansats: $y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

insättning i $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ ger

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - (2A\cos 2x - 2B\sin 2x)$$
$$-2(A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(-2A - 6B)\cos 2x + (2B - 6A)\sin 2x = \sin 2x$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2A - 6B = 0 \\ 2B - 6A = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{20} \\ B = \frac{1}{20} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$$

$$y = y_h + y_p$$

Svar: $y = Ce^{-x} + De^{2x} - \frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$

IV $h(x) =$ "ännu värre".

Använd komplexa metoden.

Ex. Bestäm en partikulärlösning till $y'' + 2y' + 2y = xe^x \sin x$

L: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$

$u'' + 2u' + 2u = xe^x e^{ix}$

$u'' + 2u' + 2u = xe^{(1+i)x}$

Sub. $u = ze^{(1+i)x}$

⋮ osv.

obs!!

$\operatorname{Im} u_p = y_p$

Se nästa sida.

Bestäm en partikulärlösning till

$$y'' + 2y' + 2y = xe^x \sin x \ .$$

Lösning: Vi bestämmer en partikulärlösning u_p till

$$u'' + 2u' + 2u = xe^{(1+i)x} \ .$$

Den sökta partikulärlösningen är sedan $y_p = \operatorname{Im} u_p$.
Substituera $u = ze^{(1+i)x}$. Derivering ger

$$u' = z'e^{(1+i)x} + z(1+i)e^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}(z' + (1+i)z)$$

och $u'' = e^{(1+i)x}(z'' + (1+i)z' + (1+i)z' + (1+i)^2 z) =$

$$= e^{(1+i)x}(z'' + 2(1+i)z' + 2iz) \ .$$

Insättning och division med $e^{(1+i)x}$ ger

$$z'' + (4+2i)z' + (4+4i)z = x \ .$$

En partikulärlösning till denna ekvation får vi genom ansatsen $z_p = cx + d$. Derivering, insättning och identifiering av koefficienterna ger

$$\begin{cases} (4+4i)c = 1 \\ (4+2i)c + (4+4i)d = 0 \ . \end{cases}$$

Av detta följer

$$c = \frac{1}{4+4i} = \frac{4-4i}{16+16} = \frac{1-i}{8} \quad \text{och}$$

$$d = \frac{-(4+2i)c}{4+4i} = \frac{-4-2i}{16(1+i)^2} = -\frac{4+2i}{32i} = \frac{-1+2i}{16} \ .$$

En partikulärlösning till (6) är

$$u_p = \left(\frac{1-i}{8}x + \frac{-1+2i}{16}\right)e^{(1+i)x} =$$

$$= \frac{e^x}{16}((2x-1) + i(-2x+2))\ (\cos x + i \sin x) \ .$$

Den sökta partikulärlösningen är

$$y_p = \operatorname{Im} u_p = \frac{e^x}{16}((-2x+2)\cos x + (2x-1)\sin x) \ .$$

Sammanfattning av ansatser för att bestämma partikulärlösning till $y'' + ay' + by = f(x)$.

$f(x)$	Villkor	y_p
$a_n x^n + \dots + a_o$	$b \neq 0$	$b_n x^n + \dots + b_o$
	$b = 0$, $a \neq 0$	$x(b_n x^n + \dots + b_o)$
$\sin \beta x$ $\cos \beta x$ $C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$	$i\beta$ ej rot till $r^2 + ar + b = 0$	$c \sin \beta x + d \cos \beta x$
	$i\beta$ rot till $r^2 + ar + b = 0$	$x(c \sin \beta x + d \cos \beta x)$
$P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$ $P(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x$ $P(x)\, e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$		Sätt $y = ze^{(\alpha + i\beta)x}$

Sist: Summa i H.L.

Ex. Lös diff. ekv

$$y'' - 3y' + 2y = e^x + 4x + \sin x$$

L: Sök först y_h.

Sedan y_{p_1} till $y'' - 3y' + 2y = e^x$

y_{p_2} till $y'' - 3y' + 2y = 4x$

och y_{p_3} till $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

Svar: $y = y_h + y_p$

Högre ordningens.

Se 9.4.

Ex. Lös $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = xe^{x}$

L: Sök y_h.

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0$$

$$(r-1)^3 (r+1) = 0$$

$$y_h = (Ax^2 + Bx + C)e^{x} + De^{-x}$$

Sök sedan y_p.

⋮ osv.