

Magnus Berggren.

Analys 12 hp.

ht 2020.

period 0

hembel.

period 1

2 st duggor.
+ tenta.

period 2.

1 st dugga.
+ tenta.

Övar problemlösning.

logiska resonemang.

matematik "ingenjörens språk".

Obs! Färdighetsämne.

så

öva

, öva

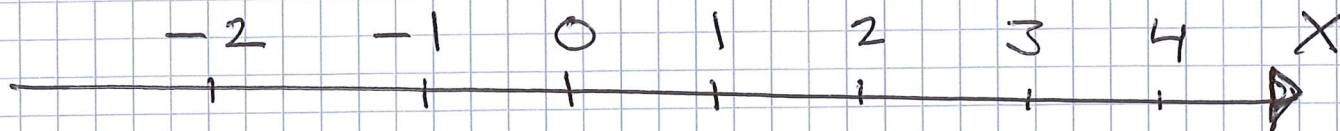
, öva!

lös uppgifter.

Följ planeringen!

Följ $\approx$ 1.1-1.5

Talaxeln



$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ (reella tal)}$$

$\mathbb{Q}$ är mängden av rationella tal
"bröktal".

ex. irrationella tal

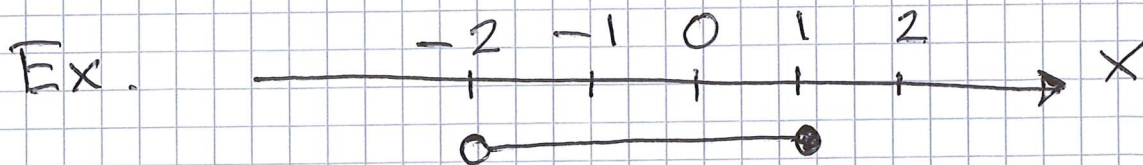
$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

$$e \approx 2,72$$

$$\pi \approx 3,14$$

Ex. $3 < 5$

$$-6 > -10$$



$$-2 < x \leq 1 \iff x \in]-2, 1]$$

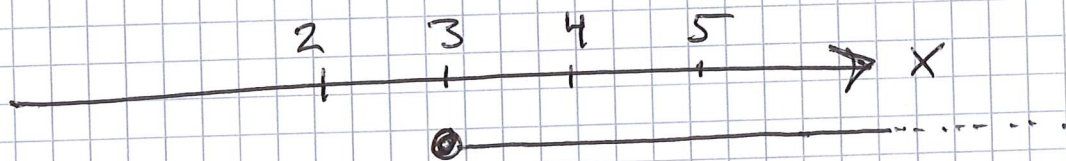
$x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ implikation
"medför allt"

Ex. $2 < x < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 7$
 ~~$\Leftarrow$~~

$\Leftrightarrow$ ekvivalens.

Ex. $x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty[$



Algebra.

Kvadreringsregler

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Konjugatregeln

Rep: Bråkräkning.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \dots$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dots = \frac{ad}{bc}$$

; osv.

Potenslagar

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

(Samma bas.
olika exp.)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

(Samma exp.
olika bas)

Def: $a^0 = 1$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Ex. } 3^{-2} - (-2)^{-3} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{9} - \frac{1}{-8} =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{8+9}{72} = \frac{17}{72}$$

$$\text{Ex. } (2^3)^2 - 3^{2^2} = 8^2 - 3^4 = 64 - 81 = -17$$

$$\text{Ex. Förenkla } \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2} = *$$

L: Täljaren =

$$= \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = \frac{b^2 - a^2}{ab} = \frac{(b-a)(b+a)}{ab}$$

$$\text{Nämnamren} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{ab}$$

$$* = \frac{(b-a)(b+a)}{ab} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{b-a}{b+a}$$

$$\text{Svar: } \frac{b-a}{b+a}$$

Ekvationer

Ex lös rot ekvationen

$$3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$$

L. $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$

kvadrera

$\Rightarrow (3 - \sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{4x+5})^2$

obs!

$$9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1 = 4x + 5$$

$$-6\sqrt{x-1} = 3x - 3$$

$$-2\sqrt{x-1} = x - 1$$

$\Rightarrow 4(x-1) = (x-1)^2$

kvadrera igen

$$4(x-1) - (x-1)^2 = 0$$

$$(x-1)(4 - (x-1)) = 0$$

$$(x-1)(5-x) = 0$$

dvs $x=1$ eller $x=5$

Prövning:

$$V.L._{x=1} = 3 - \sqrt{1-1} = 3$$

$$H.L._{x=1} = \sqrt{4 \cdot 1 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

$$V.L._{x=5} = 3 - \sqrt{5-1} = 3 - 2 = 1$$

$$H.L._{x=5} = \sqrt{4 \cdot 5 + 5} = \sqrt{25} = 5$$

Svar:
 $x=1$

Gör så här : Hämta - osv .

(I) Skriv av uppgiften .

(II) Skriv t.ex L :
när lösningen startar .

tänk efter : Ev. krav?

(III) Gör prövning .

(IV) Avsluta med svar .

Ex. Lös $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{x - 6}$

L : krav : $x \geq 6$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x} &= \sqrt{x - 6} \\ x^2 - 4x &= x - 6 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

falska .

Svar : Inga lösningar .

$\sqrt{x}$ kräver $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

t.ex. $\sqrt{9} = 3$

2:a grads ekv.

ex. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Pq-formeln är o.k. men
bättre med kvadratkomplettering.
—onv.

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Bevis:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{v.s.v.}$$

Ex. Lös $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$L: x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 =$$

$$\text{f\u00f6r } (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

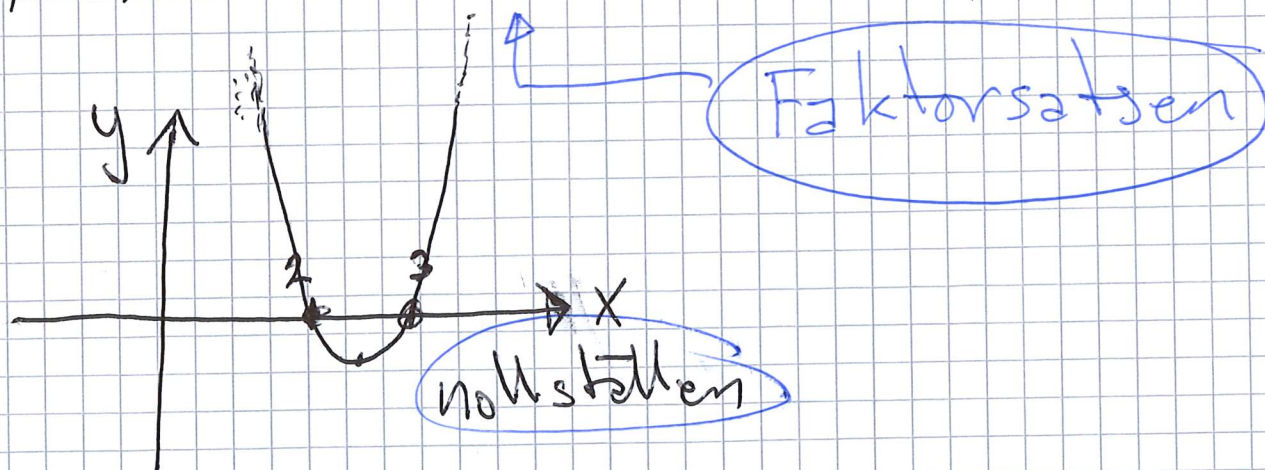
$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Svar: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Alt. Tolkas uttrycket som funktion.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$



Faktorsatsen.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

där $n \in \mathbb{N}$ utgör ett
polynom.

Sats: $p(\alpha) = 0$
dvs α nollställe $\Leftrightarrow (x - \alpha)$ ingår
som faktor
i $p(x)$.

Bevis:
$$\frac{p(x)}{x - \alpha} = \text{kvot} + \frac{\text{rest}}{x - \alpha} = k$$

$$p(x) = (\text{kvot})(x - \alpha) + k$$

$$p(\alpha) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$k = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0 \quad \text{v.s.v.}$$

Ex. Faktorisera $x^3 - x$

$$L: x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

Ex. Faktorisera $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

$$L: x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x-3)(\quad ? \quad)$$

Gissa nollställe.

$x=3$ är nollställe.

Då ingår $(x-3)$ som faktor.
(enligt faktorsatsen).

Polynomdivision.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x-3} = 2$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 \quad | \quad x-3 \\ \hline -(x^3 - 3x^2) \\ \hline 5x^2 - 9x - 18 \\ -(5x^2 - 15x) \\ \hline 6x - 18 \\ -(6x - 18) \\ \hline 0 \end{array}$$

Rep:

$$\frac{47}{6} = 7 + \frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{7} \text{ kvot.} \\ 47 \quad | \quad 6 \\ \hline -42 \\ \hline \textcircled{5} \text{ rest.} \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x-3)(x^2 + 5x + 6) =$$

$$= (x-3)(x+2)(x+3)$$

Till sist:

Substitutioner, Sub.

Ex. Lös $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$.

L: Sub. $t = x^2$, $t \geq 0$.

$$t + \frac{4}{t} = 5$$

$\therefore$ OSV.

Ex. Lös $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

L: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

Sub. $t = 2^x$, $t > 0$.

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$\therefore$ OSV.

Olikheter

Ex. För vilka x gäller $(x-1)(x-2) > 0$?

$$\begin{array}{ccccccccccc} L: & & & 1 & & 2 & & & & & x \\ & & & | & & | & & & & & \\ (x-1) & - & 0 & + & + & + & + & + & + & + & \\ (x-2) & - & & - & 0 & + & + & + & + & + & \\ \hline (x-1)(x-2) & + & 0 & - & 0 & + & + & + & + & + & \end{array}$$

Svar: $x < 1$, $x > 2$

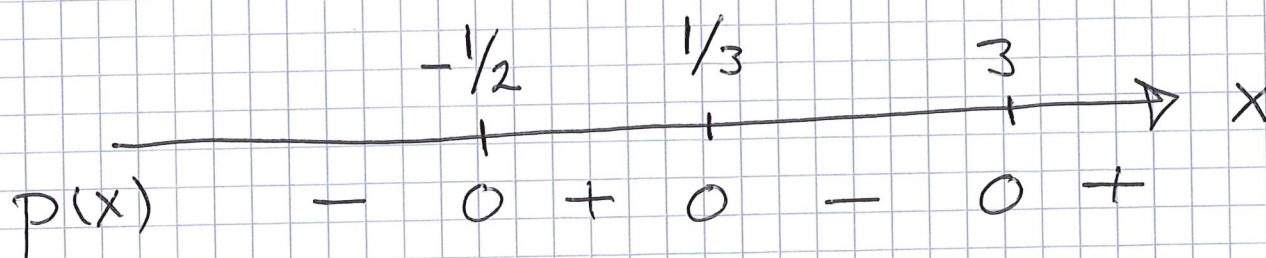
Ex. För vilka x gäller att
 $6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 < 0$?

L: Faktorisera. Tänk nollställe
: osv.

$$\begin{aligned} p(x) &= 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3 = (x-3)(6x^2 + x + 1) = \\ &= 6(x-3)\left(x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \quad \text{ger } x = -\frac{1}{2} \\ \text{eller } x = \frac{1}{3}$$

$$p(x) = 6(x-3)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$$



Svar: $p(x) < 0$ precis då $x < -\frac{1}{2}$
 eller $\frac{1}{3} < x < 3$.

Ex. För vilka x gäller olikheten

$$x+3 \leq \frac{2x}{x-2} \quad ?$$

L: Obs! Färligt vid mult./div.

Bättre (I) Flytta över.
 (noll på ena sidan)

(II) Faktorisera

(III) Gör teckenstudie

$$x+3 \leq \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{x-2} - (x+3) \geq 0 \Leftrightarrow$$

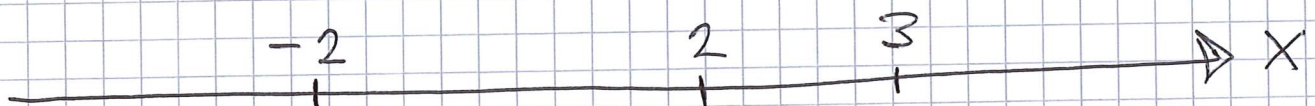
$$\frac{2x - (x+3)(x-2)}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{2x - (x^2 + x - 6)}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{-x^2 + x + 6}{x-2} \geq 0$$

$$-\frac{(x+2)(x-3)}{x-2} \geq 0$$

$$R(x) = -\frac{(x+2)(x-3)}{x-2} \geq 0$$



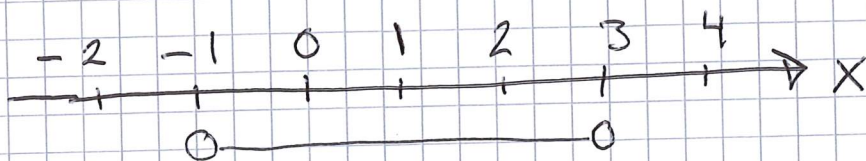
$$R(x) \quad + \quad 0 \quad - \quad \neq \quad + \quad 0 \quad -$$

$$\text{Svar: } x \leq -2, \quad 2 < x \leq 3$$

Absolutbelopp

$|x - a|$ betyder avståndet mellan x och a .

Ex. $|x - 1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$



Falluppdelning

$$|x - a| = \begin{cases} x - a, & x \geq a \\ -(x - a), & x < a \end{cases}$$

Ex. Lös ekvationen $|x - 2| + 2x = 1$

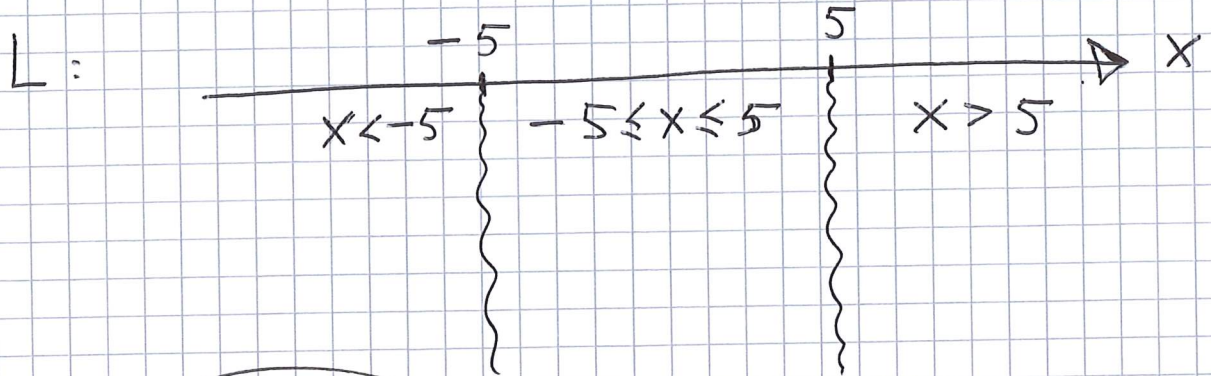
L:

$-(x - 2) + 2x = 1$	$x - 2 + 2x = 1$
$x = -1$	$3x = 3$
$\in x < 2$	$x = 1 \notin x \geq 2$
	ej lösning.

Svar: $x = -1$

Ex. Lös ekvationen

$$|x-5| + |x+5| = 6$$



3 fall.

osv.

Svar: Lösning saknas.

Obs! Rätt svar men
motivering saknas ger
0 poäng.
