

# Föreläsning 11

## Momentgenererande funktioner

Vi påminner om

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{\text{alla } k} g(k) P(X = k) & \text{om } X \text{ är diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{om } X \text{ är kontinuerlig} \end{cases}$$

där vi sätter förut att  $E[|g(X)|] < \infty$ . För vissa funktioner  $g$  ges väntevärdet av den stokastiska variabeln  $g(X)$  ett speciellt namn.

**Definition** (a) Väntevärdet  $E[X^k]$  kallas det  $k$ : *e momentet* av den stokastiska variabeln  $X$ ,  $k = 1, 2, \dots$

(b) Funktionen  $t \mapsto M(t) = E[e^{tX}]$  kallas *momentgenererande funktion (m.g.f.)* av den stokastiska variabeln  $X$ .

**Anmärkning** Motiveringen för benämningen är Taylor-serien

$$E[e^{tX}] = 1 + t E[X] + \frac{t^2}{2!} E[X^2] + \frac{t^3}{3!} E[X^3] + \dots$$

om den konvergerar på något lämpligt sätt.

**Sats** Antag att den stokastiska variabeln  $X$  har den m.g.f.  $M$  och ändliga moment  $E[X^1], \dots, E[X^n]$ . Då gäller att

$$E[X^k] = M^{(k)}(0) \equiv \left. \frac{d^k}{dt^k} M(t) \right|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Bevis. *Steg 1* Låt  $k = 1$ . Det gäller att

$$E[X] = E[X \cdot e^{tX}]|_{t=0} = E\left[\left.\frac{d}{dt} e^{tX}\right]\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} E[e^{tX}]\right|_{t=0} = M'(0).$$

*Steg 2* Iteration ger för den  $k$ : *e* derivatan

$$X^k = X^k \cdot e^{tX}|_{t=0} = \left.\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\right|_{t=0}.$$

Alltså

$$E[X^k] = E[X^k \cdot e^{tX}]|_{t=0} = E\left[\left.\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\right]\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k}{dt^k} E[e^{tX}]\right|_{t=0} = M^{(k)}(0).$$

**Sats** Låt  $X$  och  $Y$  vara två oberoende stokastiska variabler med m.g.f.  $M_X$  och  $M_Y$ . Då gäller för  $Z = X + Y$

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

för alla  $t \in \mathbb{R}$ , för vilka båda,  $M_X(t)$  och  $M_Y(t)$  existerar.

Bevis. Att  $X$  och  $Y$  är oberoende medför att också  $e^{tX}$  och  $e^{tY}$  är oberoende. Detta medför  $E[e^{tX} \cdot e^{tY}] = E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}]$ . Genom att använda definitionen får man

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tX}] = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}] \\ &= E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}] = M_X(t) \cdot M_Y(t). \end{aligned}$$

**Anmärkning** Resultatet kan generaliseras till ändliga summor

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

av oberoende stokastiska variabler  $X_1, \dots, X_n$ :

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_n}(t)$$

för alla  $t \in \mathbb{R}$ , för vilka  $M_{X_1}(t), \dots, M_{X_n}(t)$  samtidigt existerar.

**Sats** (a) (Entydighet) Om  $M(t)$  för alla  $t$  i något intervall är m.g.f. till någon stokastisk variabel  $X$ , så är fördelningen av  $X$  entydigt bestämt.

(b) (Konvergens) Låt  $X_1, X_2, \dots; X$  vara stokastiska variabler med m.g.f.  $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots; M_X(t)$  för alla  $t$  i något intervall  $I$ . Om

$$M_{X_n}(t) \longrightarrow M_X(t), \quad t \in I$$

då  $n \rightarrow \infty$ , så gäller för fördelningsfunktionerna  $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots; F_X(x)$

$$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$$

då  $n \rightarrow \infty$ , för alla  $x \in \mathbb{R}$  där  $F_X(x)$  är kontinuerlig.

**Exempel** Låt  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Bestäm  $M_X, E[X], \text{Var}(X)$ .

Svar:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pe^t + 1 - p)^n \end{aligned}$$

där vi har använt Binomialsatsen. Vi får

$$M'_X(t) = n (pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t$$

$$E[X] = M'_X(0) = np$$

$$M_X''(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-2} (pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t$$

$$E[X^2] = M_X''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

**Exempel** Låt  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Bestäm  $M_X$ ,  $E[X]$ ,  $\text{Var}(X)$ .

Svar:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t}, \quad t < \lambda. \end{aligned}$$

Således

$$M_X'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \quad \text{och} \quad M_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}, \quad t < \lambda.$$

Vi får

$$E[X] = M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad E[X^2] = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}, \quad \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Exempel** Låt  $Z \sim N(0, 1)$ . Bestäm  $M_Z$ .

Svar:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^\infty e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2tx}{2}\right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right\} dx \\ &= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \\ &= e^{t^2/2} \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$  är täthetsfunktionen av  $N(t, 1)$ .

**Exempel** Låt  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Bestäm  $M_X$ ,  $E[X]$ ,  $\text{Var}(X)$ .

Svar: Det gäller att

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \text{dvs.} \quad X = \mu + \sigma Z.$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = E[e^{t(\mu + \sigma Z)}] \\ &= E[e^{t\mu} \cdot e^{t\sigma Z}] = e^{t\mu} \cdot E[e^{t\sigma Z}] = e^{t\mu} \cdot M_Z(t\sigma) \\ &= \exp\left\{\mu \cdot t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alltså

$$\begin{aligned}E[X] &= M'_X(0) = \mu \\E[X^2] &= M''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2 \\Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \sigma^2.\end{aligned}$$

**Exempel** Låt  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  och  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ . Visa att

$$X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

Svar: Det gäller att

$$\begin{aligned}M_{X_1+X_2}(t) &= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \\&= \exp\left\{\mu_1 \cdot t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right\} \cdot \exp\left\{\mu_2 \cdot t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right\} \\&= \exp\left\{(\mu_1 + \mu_2) \cdot t + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Detta är m.g.f. av  $N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ . Det följer nu från entydighetssatsen att  $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ .

## Bevis av Centrala gränsvärdessatsen

**Sats** (Centrala gränsvärdessatsen) Låt  $X_1, X_2, \dots$  vara en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med  $E[X_i] = \mu$  och  $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$ . Det gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \Phi(a), \quad a \in \mathbb{R},$$

där  $\Phi$  betecknar fördelningsfunktionen för  $N(0, 1)$  och  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Bevis. Inför  $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ . Då är

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X} - \mu) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\sqrt{n}}.$$

Alltså

$$\begin{aligned}M_{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) &= E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^n t \cdot \frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right\}\right] \\&= \prod_{i=1}^n E\left[\exp\left\{t \cdot \frac{Y_i}{\sqrt{n}}\right\}\right] \\&= \prod_{i=1}^n M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\end{aligned}\tag{1}$$

där vi har utnyttjat att  $Y_1, Y_2, \dots$  är oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Låt oss utveckla Taylor-serien

$$\begin{aligned} M_{Y_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= M_{Y_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} M'_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{2n} M''_{Y_1}(0) + O \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \\ &= 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} E[Y_1] + \frac{t^2}{2n} E[Y_1^2] + O \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + O \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Ekvation (2) insatt i (1) ger

$$M_{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) = \left( 1 + \frac{t^2}{2n} + O \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 \right)^n \longrightarrow e^{\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

då  $n \rightarrow \infty$ . Konvergenssatsen och entydighetsatsen medför nu Centrala gränsvärdesatsen.