KORTFATTADE LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I TAMS17 STATISTISK TEORI FK, FREDAG 14/1 2022 KL 14.00-18.00.

1. (a) $Y = \frac{X}{\theta} - 1$ är en pivotvariabel, ty den är en monoton funktion av θ, men den har sannolikhetsfördelningen $\mathrm{N}(0,1)$ som inte beror av θ.

   (b) Det gäller att $0.95 = 1 - \alpha = P_\theta(-z_{\alpha/2} \leq \frac{X}{\theta} - 1 \leq z_{\alpha/2}) = P_\theta(1 - z_{\alpha/2} \leq \frac{X}{\theta} \leq 1 + z_{\alpha/2}) = P_\theta(\{\theta \geq \frac{X}{1+z_{\alpha/2}}\} \cap \{\theta \geq \frac{-X}{1-z_{\alpha/2}}\})$, där $z_{\alpha/2} \approx 1.96$. Ett konfidensintervall med önskad konfidensgrad ges därför av: $\underline{\underline{C(X) = [\max(\frac{X}{2.96}, \frac{-X}{0.96}), \infty)}}$.

2. (a) $f_{X,\Theta}(x,\theta) = f_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\theta}$ för $0 < x < \theta < 1$. Detta ger att

$$f_X(x) = \int_x^1 \frac{1}{\theta} d\theta = -\ln x \qquad \forall 0 < x < 1.$$

   Alltså är aposteriorifördelningens täthetsfunktion

$$f_{\Theta|X=x}(\theta) = \frac{f_{X,\Theta}(x,\theta)}{f_X(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{-\theta \ln x} \quad \forall x < \theta < 1.}}$$

   (b) Bayesskattningen av θ är:

$$\widehat{\theta} = \int_x^1 \frac{\theta}{-\theta \ln x} d\theta = \underline{\underline{\frac{x-1}{\ln x}}}.$$

3. Det starkaste testet har enligt Neyman-Pearsons lemma testfunktionen $\phi(x) = I\{f(x|H_1) > k f(x|H_0)\}$, där k väljs så att signifikansnivån är 0.04. Kvoten $\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)}$ kan anta värdena $\frac{17}{2}, 7, 11, \frac{11}{3}, \frac{13}{2}, 6, 2, 15, 2, \frac{14}{86}$. Vi ska välja $\underline{\underline{k = 8}}$, vilket svarar mot testfunktionen $\phi(x) = I\{x \in \{1,3,8\}\}$. Detta test har signifikansnivån 0.04 och styrkan $f(1|H_1) + f(3|H_1) + f(8|H_1) = \underline{\underline{0.43}}$ mot H_1.

4. (a) Täthetsfunktionen för $X = (X_1, \ldots, X_n)$ är: $f_X(x|\theta) = \Pi_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \exp((\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$, vilket medför att $l(\theta) = \ln f_X(x|\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$. Villkoret $l'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$ är uppfyllt för $\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$, och detta är ett maximum, ty $l''(\theta) < 0$. ML-skattaren är därför: $\underline{\underline{\widehat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}}}$.

(b) $\mathcal{I}_{X_1}(\theta) = E(-\frac{d^2}{d\theta^2} \ln f_{X_1}(X_1|\theta)) = \underline{\underline{\frac{1}{\theta^2}}}$.

(c) Det gäller att

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)}{\mathcal{I}_{X_1}(\theta)^{-1/2}} = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)}{\theta} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

då $n \to \infty$. Ett tvåsidigt konfidensintervall för θ av Wald-typ med asymptotisk konfidensgrad 95% är därför: $\underline{\underline{C(X) = \widehat{\theta} \pm \widehat{\theta}\frac{1.96}{\sqrt{n}}}}$.

5. Täthetsfunktionen för $X = (X_1, \ldots, X_n)$ är:

$$f_X(x|\mu) = \Pi_{i=1}^n f_{X_i}(x_i|\mu) = \begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^n x_i + n\mu}, & \text{om } \min_{i=1,\ldots,n} x_i \geq \mu; \\ 0, & \text{om } \min_{i=1,\ldots,n} x_i < \mu. \end{cases}$$

Denna funktion är växande i μ för $\mu \leq \min_{i=1,\ldots,n} x_i$, så ML-skattningen av μ är $\widehat{\mu} = \min_{i=1,\ldots,n} x_i$. ML-skattningen $\widehat{\mu}_0$ under nollhypotesvillkoret $\mu \leq 0$ är lika med $\widehat{\mu}$ om $\widehat{\mu} \leq 0$, annars är $\widehat{\mu}_0 = 0$. Likelihoodkvottest-statistikan är därför:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } \min_{i=1,\ldots,n} x_i \leq 0; \\ e^{-n \min_{i=1,\ldots,n} x_i}, & \text{om } \min_{i=1,\ldots,n} x_i > 0. \end{cases}$$

Likelihoodkvottestet har alltså testfunktionen $\phi_\lambda(x) = I\{\lambda(x) < k\}$, där $k \in (0,1)$ är en konstant. Denna är ekvivalent med testfunktionen $\phi(x) = I\{\min_{i=1,\ldots,n} x_i > c\}$, där $c > 0$ är en konstant.

6. (a) Eftersom

$$f_X(x|\mu) = \frac{\mu^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\mu} = \exp(\ln \mu \sum_{i=1}^n x_i) \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\mu},$$

så är $\{f_X(x|\mu); \mu > 0\}$ en exponentialfamilj med den tillräckliga statistikan $Y = \underline{\underline{\sum_{i=1}^n X_i}} \sim \mathrm{Po}(n\mu)$. Vidare är $\{\ln \mu; \mu > 0\} = \mathbb{R}$, så den tillräckliga statistikan är fullständig.

(b) Låt s vara ett tal sådant att $n\mu(e^s - 1) = -\mu$, d.v.s., $s = \ln(1 - \frac{1}{n})$. Enligt uppgiftstexten är då $\widehat{\tau(\mu)} = e^{sY} = \underline{\underline{(1 - \frac{1}{n})^{\sum_{i=1}^n X_i}}}$ en väntevärdesriktig skattning av $\tau(\mu)$, och eftersom den är en funktion av en fullständig och tillräcklig statistika, så är den UMVUE.