TAMS17/TEN1 STATISTISK TEORI FK
TENTAMEN FREDAG 14/1 2022 KL 14.00-18.00.

Examinator och jourhavande lärare: Torkel Erhardsson, tel. 28 14 78.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i matematisk statistik utgiven av matematiska institutionen (utan egna anteckningar). Ett A4-ark med egna anteckningar på båda sidor. Räknedosa med tömda minnen.

Tentamen består av 6 uppgifter värda 3 poäng vardera. Betygsgränser: 8 poäng för 3, 11.5 poäng för 4, 15 poäng för 5. Resultatet meddelas via e-post.

Uppgift 1

Låt $X \sim \mathrm{N}(\theta, \theta)$, där parametern $\theta > 0$ är okänd. (Detta betyder att $E(X) = D(X) = \theta$.)

(a) Hur ser man att $Y = \frac{X-\theta}{\theta} = \frac{X}{\theta} - 1$ är en pivotvariabel för θ? Förklara.

(b) Utnyttja Y för att bestämma ett (en–eller tvåsidigt) konfidensintervall för θ av grad 95%. Intervallet behöver inte ha några optimalitetsegenskaper.

Uppgift 2

Låt x vara det observerade värdet av en $\mathrm{U}(0, \theta)$-fördelad stokastisk variabel X, där $\theta > 0$. Betrakta på Bayesianskt vis θ som en stokastisk variabel Θ, med apriorifördelning $\mathrm{U}(0, 1)$. Bestäm aposteriorifördelningens täthetsfunktion, samt Bayesskattningen av θ.

Uppgift 3

Låt x vara det observerade värdet av en stokastisk variabel X som kan anta värdena $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Följande tabell anger sannolikhetsfunktionen för X under de två hypoteserna H_0 och H_1:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x\|H_0)$	0.02	0.01	0.01	0.03	0.02	0.01	0.02	0.01	0.01	0.86
$f(x\|H_1)$	0.17	0.07	0.11	0.11	0.13	0.06	0.04	0.15	0.02	0.14

Bestäm det starkaste testet av H_0 mot H_1 på (den exakta) signifikansnivån 4%, och bestäm detta tests styrka mot H_1.

Uppgift 4

Låt $X = (X_1, \ldots, X_n)$, där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler med täthetsfunktion

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{om } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

och parametern $\theta > 0$ är okänd.

(a) Beräkna ML-skattaren av θ baserad på $X_1, \ldots, X_n$.

(b) Beräkna Fisherinformationen $\mathcal{I}_{X_1}(\theta)$ för X_1.

(c) Bestäm ett tvåsidigt konfidensintervall av Wald-typ för θ med asymptotisk konfidensgrad 95% (då $n \to \infty$). OBS: de villkor som garanterar att ML-skattaren är konsistent och asymptotiskt normalfördelad är uppfyllda, vilket inte behöver visas.

Uppgift 5

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende likafördelade stokastiska variabler, med täthetsfunktion

$$f(x|\mu) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & \text{om } x \geq \mu; \\ 0, & \text{om } x < \mu, \end{cases}$$

där parametern $-\infty < \mu < \infty$ är okänd. Härled likelihoodkvottestet av $H_0 : \mu \leq 0$ mot $H_1 : \mu > 0$, och visa att detta har testfunktionen $\phi(x) = I\{\min_{i=1,\ldots,n} x_i > c\}$ (d.v.s., H_0 avvisas om $\min_{i=1,\ldots,n} x_i > c$), där c är en konstant som bestämmer testets signifikansnivå.

Uppgift 6

Låt $X = (X_1, \ldots, X_n)$, där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende Po(μ)-fördelade stokastiska variabler. Parametern $\mu > 0$ är okänd.

(a) Bestäm en tillräcklig statistika för μ, och visa att den också är fullständig.

(b) Från teorin för momentgenererande funktioner (se t.ex. kursen TAMS32 Stokastiska processer) fås att om $Y \sim \text{Po}(m)$, där $m > 0$, så gäller att

$$E(e^{sY}) = e^{m(e^s-1)} \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Utnyttja detta och resultatet i del (a) för att bestämma den bästa väntevärdesriktiga skattningen (UMVUE) av $\tau(\mu) = e^{-\mu}$ baserad på X. Svaret måste motiveras.