LINKÖPINGS UNIVERSITET

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I TAMS14 SANNOLIKHETSLÄRA GK, TISDAG 17 AUGUSTI 2021 KL 08.00-12.00.

1. (a) Låt $A =$"Bakverket är misslyckat", $H_1 =$"Frasse har gjort bakverket", $H_2 =$"Janos har gjort bakverket", $H_3 =$"Hilding har gjort bakverket". Lagen om total sannolikhet ger:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|H_i)P(H_i) = 0.02 \cdot 0.5 + 0.07 \cdot 0.1 + 0.18 \cdot 0.4 = \underline{\underline{0.089}}.$$

(b) Bayes' sats ger:

$$P(H_1|A^c) = \frac{P(A^c|H_1)P(H_1)}{P(A^c)} = \frac{0.98 \cdot 0.5}{1 - 0.089} \approx \underline{\underline{0.54}}.$$

2. (a) Vi ska maximera funktionen

$$P(X > a+1 | X > a) = \frac{P(X > a+1)}{P(X > a)} = \frac{1 - F_X(a+1)}{1 - F_X(a)}$$

$$= \frac{e^{-(1+a^3)/3}}{e^{-(1+(a-1)^3)/3}} = e^{((a-1)^3 - a^3)/3} = e^{a - a^2 - 1/3} = e^{p(a)}.$$

Maximum fås då $p'(a) = 1 - 2a = 0$, d.v.s. då $\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$.

(b) Medianen m är lösningen till ekvationen $F_X(m) = \frac{1}{2}$, d.v.s.,

$$1 - e^{-(1+(m-1)^3)/3} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m = 1 + (3 \ln 2 - 1)^{1/3} \approx \underline{\underline{2.03}}.$$

3. Låt X_i vara antalet strömmingar man får vid kast nr. i, där $i = 1, \ldots, 100$. Det gäller att $E(X_1) = 0 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.1 = 2.2$, och att $E(X_1^2) = 0 + 1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.1 = 6$, vilket ger att $V(X_1) = 6 - 2.2^2 = 1.16$. Eftersom $n = 100$ är stort, ger centrala gränsvärdessatsen att $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim$ approx $\mathrm{N}(100 \cdot 2.2, \sqrt{100 \cdot 1.16}) = \mathrm{N}(220, \sqrt{116})$. Vi får:

$$P(Y \geq 230) = 1 - \Phi\left(\frac{230 - 220}{\sqrt{116}}\right) \approx 1 - \Phi(0.9285) \approx \underline{\underline{0.18}}.$$

4. (a) Värdemängden är: $S_X = \{0, 2, 4\}$.

(b) Låt utfallsrummet bestå av alla sätt att fördela fyra lag på fyra kvartfinaler. Klassiska sannolikhetsdefinitionen ger:

$$P(X=0) = \frac{g(\{X=0\})}{m} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}} = \frac{16 \cdot 36}{28 \cdot 90} = \frac{8}{35} \approx \underline{\underline{0.23}};$$

$$P(X=2) = \frac{g(\{X=2\})}{m} = \frac{4\binom{4}{2} \cdot 3\binom{4}{2} \cdot 4}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}} = \frac{24 \cdot 72}{28 \cdot 90} = \frac{24}{35} \approx \underline{\underline{0.69}};$$

$$P(X=4) = \frac{g(\{X=4\})}{m} = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}} = \frac{6^3}{28 \cdot 90} = \frac{3}{35} \approx \underline{\underline{0.086}}.$$

5.

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 \big([-xe^{-\frac{x}{y}}]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} dx \big) dy$$
$$= 0 + \int_0^1 \big([-ye^{-\frac{x}{y}}]_{x=0}^{x=\infty} \big) dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{\underline{\underline{2}}};$$

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{x^2}{y^2} e^{-\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 \big([-\frac{x^2}{y} e^{-\frac{x}{y}}]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \frac{2x}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx \big) dy$$
$$= 0 + 2\int_0^1 \int_0^\infty \frac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx dy = 2E(Y) = \underline{\underline{1}};$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{x^2}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 \big([-x^2 e^{-\frac{x}{y}}]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty 2xe^{-\frac{x}{y}} dx \big) dy$$
$$= 0 + 2\int_0^1 y \big([-xe^{-\frac{x}{y}}]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} dx \big) dy$$
$$= 0 + 2\int_0^1 y \big([-ye^{-\frac{x}{y}}]_{x=0}^{x=\infty} \big) dy = 2\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3},$$

så vi får: $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{\underline{\underline{6}}}$.

6. (a) Låt X vara tiden för den första taxibilens ankomst till stolpen, och Y vara tiden *mellan* den första och den andra taxibilens ankomst. Då är X och Y oberoende exp(1)-fördelade stokastiska variabler. Herr Anderssons väntetid är X minuter, och fru Bengtssons väntetid, givet att $X > 2$, är $X - 2 + Y$. Sökt är

$$P(X > X - 2 + Y | X > 2) = \frac{P(\{Y < 2\} \cap \{X > 2\})}{P(X > 2)} = P(Y < 2),$$

där $P(Y < 2) = \int_0^2 e^{-x}dx = 1 - e^{-2} \approx \underline{\underline{0.86}}$.

(b) På samma sätt som i (a) fås:

$$P(X > 2(X-2+Y)|X > 2) = \frac{P(\{Y < 2 - 0.5X\} \cap \{X > 2\})}{P(X > 2)},$$

där $P(X > 2) = \int_2^4 e^{-x}dx = e^{-2}$. Det gäller att

$$P(\{Y < 2 - 0.5X\} \cap \{X > 2\}) = \int_2^4 \int_0^{2-0.5x} e^{-x-y}dydx$$

$$= \int_2^4 e^{-x}(1 - e^{-2+0.5x})dx = \int_2^4 (e^{-x} - e^{-2-0.5x})dx$$

$$= \left[-e^{-x} + 2e^{-2-0.5x}\right]_{x=2}^{x=4} = -e^{-4} + 2e^{-4} + e^{-2} - 2e^{-3}.$$

Detta ger till slut att

$$P(X > 2(X-2+Y)|X > 2) = \frac{e^{-2} - 2e^{-3} + e^{-4}}{e^{-2}} \approx \underline{\underline{0.40}}.$$