LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I TAMS14 SANNOLIKHETSLÄRA GK, TISDAG 19 OKTOBER 2021 KL 08.00-12.00.

1. Låt A_1 vara händelsen att A vinner sin semifinal, C_1 händelsen att C vinner sin semifinal, och A_2 händelsen att A vinner finalen. Vi får då: $P(A_2) = P(A_2|A_1 \cap C_1)P(A_1 \cap C_1) + P(A_2|A_1 \cap C_1^c)P(A_1 \cap C_1^c) = 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = \underline{\underline{0.364}}$.

2. (a) Observera först att $Y - X \sim \mathrm{N}(4000 - 5000, \sqrt{400^2 + 300^2}) = \mathrm{N}(-1000, 500)$. Sökt är

$$P(Y - X > 0) = 1 - \Phi(\frac{1000}{500}) = 1 - \Phi(2) \approx \underline{\underline{0.023}}.$$

(b)

$$P(X \leq 5000|X > 4500) = \frac{P(4500 < X \leq 5000)}{P(X > 4500)} = \frac{\Phi(0) - \Phi(-\frac{500}{300})}{1 - \Phi(-\frac{500}{300})}$$

$$= \frac{\Phi(0) + \Phi(\frac{5}{3}) - 1}{\Phi(\frac{5}{3})} \approx \underline{\underline{0.47}}.$$

3. (a)

$$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{6} e^{-x/2-y/3} dy = \frac{1}{2} e^{-x/2} \left[-e^{-y/3}\right]_{y=0}^{y=\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{-x/2} \quad \forall x > 0}};$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{1}{6} e^{-x/2-y/3} dy = \frac{1}{3} e^{-y/3} \left[-e^{-x/2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{3} e^{-y/3} \quad \forall y > 0}}.$$

(b) Eftersom $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ för alla $(x.y) \in \mathbb{R}^2$, så är X och Y $\underline{\underline{\text{oberoende}}}$.

(c) $P(\{X < 2\} \cup \{Y < 2\}) = 1 - P(\{X \geq 2\} \cap \{Y \geq 2\}) = 1 - P(X \geq 2)P(Y \geq 2)$, där:

$$P(X \geq 2) = \int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = \left[-e^{-x/2}\right]_{x=2}^{x=\infty} = e^{-1};$$

$$P(Y \geq 2) = \int_2^\infty \frac{1}{3} e^{-y/3} dy = \left[-e^{-y/3}\right]_{y=2}^{y=\infty} = e^{-2/3}.$$

Vi får att $P(\{X < 2\} \cup \{Y < 2\}) = 1 - e^{-5/3} \approx \underline{\underline{0.81}}$.

4. $E(X) = E(YZ) = E(Y)E(Z)$. Det är givet att $E(Z) = 3$, och att $E(Y) = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 1 = 0.5$, vilket ger att $E(X) = \underline{\underline{1.5}}$.

   Vidare är $E(X^2) = E(Y^2Z^2) = E(Y^2)E(Z^2)$. Eftersom $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = E(Z^2) - 3^2 = 3^2$ och $E(Y^2) = 0.5 \cdot 0^2 + 0.5 \cdot 1^2 = 0.5$, får vi att $E(X^2) = 0.5 \cdot (3^2 + 3^2) = 9$, vilket ger att $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 9 - 1.5^2 = 6.75$. Slutligen är $D(X) = \sqrt{V(X)} \approx \underline{\underline{2.60}}$.

5. Låt $A =$"nummer 13 är identisk med den okände", $B =$"den okände finns inte i databasen", och $H =$"nummer 13 är den ende i databasen med samma DNA-profil som den okände". Bayes' sats ger:

$$P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B)}$$

$$= \frac{(1-p)^{m-1}\frac{1}{N}}{(1-p)^{m-1}\frac{1}{N} + p(1-p)^{m-1}\frac{N-m}{N}} = \underline{\underline{\frac{1}{1+p(N-m)}}}.$$

   Med uppgiftens numeriska värden fås $P(A|H) = \underline{\underline{0.91}}$.

6. Vi beräknar först fördelningsfunktionen för Z. Eftersom $P(Z > 0) = 1$ så gäller att $F_Z(z) = 0$ för $z \leq 0$. För $z > 0$ fås: $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(XY \leq z) = P((X,Y) \in A)$, där $A = \{(x,y); x > 0, y \leq \frac{z}{x}\}$, och

$$P((X,Y) \in A) = \int_0^\infty \int_0^{z/x} \frac{x}{(1+x)^2(1+xy)^2} dy dx$$

$$= \int_0^\infty \Big[\frac{-1}{(1+x)^2(1+xy)}\Big]_{y=0}^{y=z/x} dx = \Big[\frac{-z}{(1+x)(1+z)}\Big]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{z}{1+z}.$$

   Härav fås:

$$\underline{\underline{f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \quad \forall z > 0.}}$$