

TAMS14/36 SANNOLIKHETSLÄRA GK  
Poissonprocessen (komplettering)

Torkel Erhardsson

14 maj 2010

# 1 Stokastiska processer

**Definition 1.1** En stokastisk process är en familj  $\{X(t); t \in T\}$  (kan även skrivas  $\{X_t; t \in T\}$ ) av stokastiska variabler, definierade på ett utfallsrum  $\Omega$ , och indexerade av en mängd  $T$  (indexmängden).

Några kommentarer till denna definition:

1.  $T$  betraktas ofta som en mängd av *tidpunkter*. Om  $T = \mathbb{Z}_+$  (de icke-negativa heltalen) eller  $T = \mathbb{Z}$  (heltalen), så kallas  $\{X(t); t \in T\}$  en stokastisk process i *diskret tid*. Om  $T = \mathbb{R}_+$  (de icke-negativa reella talen) eller  $T = \mathbb{R}$  (de reella talen), så kallas  $\{X(t); t \in T\}$  en stokastisk process i *kontinuerlig tid*.
2.  $X(t)$  kallas ofta processens *värde* (eller *tillstånd*) vid tid  $t$ .
3. För varje fixt *utfall*  $\omega$  i utfallsrummet  $\Omega$  kan man definiera en funktion från  $T$  till  $\mathbb{R}$ , genom att låta funktionens värde vid tid  $t$  vara den stokastiska variabeln  $X(t)$ :s värde för utfallet  $\omega$ . Denna funktion kallas den stokastiska processens *realisering* (eller *trajektor*) för utfallet  $\omega$ .

**Exempel 1.1** Ett exempel på en stokastisk process i diskret tid är en följd av oberoende och lika fördelade stokastiska variabler  $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$ . Andra exempel, där processens värden vid olika tidpunkter är *beroende* stokastiska variabler, är martingaler, stationära stokastiska processer, och markovkedjor. Dessa studeras i flera av fortsättningskurserna i matematisk statistik, till exempel TAMS32 Stokastiska processer.

**Exempel 1.2** Låt  $X$  och  $Y$  vara stokastiska variabler, och låt  $Z(t) = Xt + Y$  för varje  $t \in \mathbb{R}$ . Då är  $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$  en stokastisk process i kontinuerlig tid. Dess realiseringar är räta linjer.

# 2 Poissonprocessen

**Definition 2.1** En **Poissonprocess** med **intensitet**  $\lambda$  (där  $\lambda > 0$ ) är en stokastisk process i kontinuerlig tid  $\{X(t); t \geq 0\}$  med följande egenskaper:

1. Processens värde vid tid  $t$ ,  $X(t)$ , är en icke-negativt heltalsvärd stokastisk variabel (för varje  $t \geq 0$ ), och  $X(0) \equiv 0$ .
2. Processens realiseringar är ickeavtagande funktioner.

3. För varje följd av tidpunkter  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  gäller att processens inkrement  $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  är oberoende stokastiska variabler.
4. För varje  $t \geq 0$  gäller att  $P(X(t+h) - X(t) = 1) = \lambda h + o(h)$  då  $h \downarrow 0$ .
5. För varje  $t \geq 0$  gäller att  $P(X(t+h) - X(t) > 1) = o(h)$  då  $h \downarrow 0$ .

Kommentarer:

1. Med  $o(h)$  menas (på vanligt sätt) en restterm sådan att  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ .
2. Det följer av egenskaperna 4–5 att  $P(X(t+h) = X(t)) = 1 - \lambda h + o(h)$  då  $h \downarrow 0$ .

Poissonprocessen används ofta då man vill beskriva händelser av en viss typ som inträffar "fullständigt slumpmässigt i tiden"; till exempel: kunders ankomst till en butik; anrop till en telefonväxel; emissioner av partiklar från ett radioaktivt preparat, o.s.v. Poissonprocessens värde vid tid  $t$ ,  $X(t)$ , anger då hur många sådana händelser som inträffar under tidsintervallet  $[0, t]$ . Intensiteten  $\lambda$  kan tolkas som det *förväntade antalet* händelser *per tidsenhet*, vilket framgår av följande sats, som också förklarar namnet "Poissonprocess":

**Sats 2.1** Låt  $\{X(t); t \geq 0\}$  vara en Poissonprocess med intensitet  $\lambda > 0$ . För varje  $0 \leq t_1 < t_2$  gäller då att  $X(t_2) - X(t_1) \sim \text{Po}(\lambda(t_2 - t_1))$ .

*Beviskiss:* Låt  $L = t_2 - t_1$ . För varje  $N = 1, 2, \dots$  gäller att

$$X(t_2) - X(t_1) = \sum_{i=1}^N (X(t_1 + i\frac{L}{N}) - X(t_1 + (i-1)\frac{L}{N})),$$

där termerna i summan är oberoende stokastiska variabler (enligt egenskap 3 ovan). Antag nu att  $N$  är stort. Enligt egenskap 4–5 ovan gäller:

$$P(X(t_1 + i\frac{L}{N}) - X(t_1 + (i-1)\frac{L}{N}) = x) \approx \begin{cases} \frac{\lambda L}{N}, & x = 1; \\ 1 - \frac{\lambda L}{N}, & x = 0. \end{cases}$$

Det gäller därför att  $X(t_2) - X(t_1) \approx \text{Bin}(N, \frac{\lambda L}{N})$ . Eftersom  $N$  är stort, gäller vidare att  $\text{Bin}(N, \frac{\lambda L}{N}) \approx \text{Po}(\lambda L)$ . (Ett fullständigt bevis baserat på

denna skiss, där man visar att sannolikhetsfördelningen för högerledet konvergerar "i fördelning" mot  $Po(\lambda L)$  då  $N \rightarrow \infty$ , kan konstrueras med hjälp av sannolikhetsgenererande funktioner; se kursen TAMS46 Sannolikhetslära (fk.)

*Alternativt bevis:* Här nöjer vi oss med att visa att  $X(t) \sim Po(\lambda t)$ . Låt  $P_n(t) = P(X(t) = n)$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; vi ska alltså visa att  $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Det gäller att

$$P_0(t+h) = P(X(t+h) = 0 | X(t) = 0)P_0(t) = (1 - \lambda h + o(h))P_0(t) \quad \text{då } h \downarrow 0,$$

där egenskap 4–5 utnyttjades. Subtrahera med  $P_0(t)$  och dela med  $h$  i båda led, och låt  $h \downarrow 0$ , så fås differentialekvationen

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t),$$

med begynnelsevillkoret  $P_0(0) = 1$ , vilken har lösningen  $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ .

Ett liknande, men mer komplicerat resonemang för  $n \geq 1$  (använd lagen om total sannolikhet och egenskap 4–5) ger sedan:

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P(X(t+h) = n | X(t) = n)P_n(t) \\ &+ P(X(t+h) = n | X(t) = n-1)P_{n-1}(t) + P(\{X(t) \leq n-2\} \cap \{X(t+h) = n\}) \\ &= (1 - \lambda h + o(h))P_n(t) + (\lambda h + o(h))P_{n-1}(t) + o(h) \quad \text{då } h \downarrow 0. \end{aligned}$$

Subtrahera med  $P_n(t)$  och dela med  $h$  i båda led, och låt  $h \downarrow 0$ , så fås

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad \forall n \geq 1,$$

med begynnelsevillkoren  $P_n(0) = 0$  för  $n \geq 1$ . (Anmärkning: strängt taget är de ovan angivna derivatorna högerderivator, men man kan visa att också vänsterderivatorna existerar och uppfyller samma differentialekvationer.)

Vi använder sedan matematisk induktion. Antag att  $P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$  för  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Detta är enligt vad vi har visat uppfyllt för  $n = 1$ . Induktionsantagandet insatt i den andra differentialekvationen ger:

$$\frac{d}{dt} [e^{\lambda t} P_n(t)] = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!},$$

vilket tillsammans med begynnelsevillkoren ger:

$$e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

vilket visar att  $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$  ■

**Sats 2.2** Låt  $\{X(t); t \geq 0\}$  vara en Poissonprocess med intensitet  $\lambda > 0$ . Låt

$$T_k = \inf\{t > 0; X_t = k\} \quad k = 1, 2, \dots$$

Då gäller att  $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$  är oberoende och  $\exp(\lambda)$ -fördelade stokastiska variabler.

*Bevis:* Vi visar enbart att  $T_1 \sim \exp(\lambda)$ . Definitionsmässigt är  $T_1 > 0$ . För  $t > 0$  gäller, eftersom  $X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$ :

$$P(T_1 \leq t) = P(X(t) \geq 1) = 1 - P(X(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t},$$

vilket är fördelningsfunktionen för en  $\exp(\lambda)$ -fördelning. ■

Kommentarer:

1. Sats 2.2 visar att Poissonprocessens realiseringar är *styckvis konstanta* funktioner, som växer enbart genom "hopp" (diskontinuiteter), och då alltid från ett heltalsvärde till *närmast högre* heltalsvärde. Den stokastiska variabeln  $T_k$  är den tidpunkt då processen hoppar från värdet  $k - 1$  till värdet  $k$ .
2. Omvändningen till sats 2.2 gäller också. Låt  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  vara oberoende  $\exp(\lambda)$ -fördelade stokastiska variabler, och låt

$$X(t) = \max\{k = 0, 1, 2, \dots; \sum_{i=1}^k Z_i \leq t\} \quad \forall t \geq 0.$$

Då är  $\{X(t); t \geq 0\}$  en Poissonprocess med intensitet  $\lambda$ , vars hopptidpunkter är  $T_k = \sum_{i=1}^k Z_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Detta bevisar vi inte.

Som avslutning ger vi utan bevis ett par satser som behandlar *återstartade* Poissonprocesser, respektive *superposition* av Poissonprocesser.

**Sats 2.3** Låt  $\{X(t); t \geq 0\}$  vara en Poissonprocess med intensitet  $\lambda > 0$ . Fixera  $t_0 \geq 0$ , och låt  $Y(t) = X(t_0 + t) - X(t_0)$  för  $t \geq 0$ . Då är  $\{Y(t); t \geq 0\}$  en Poissonprocess med intensitet  $\lambda$ .

**Sats 2.4** Låt  $\{X_1(t); t \geq 0\}$  och  $\{X_2(t); t \geq 0\}$  vara oberoende Poissonprocesser med intensiteterna  $\lambda_1 > 0$  respektive  $\lambda_2 > 0$ . Låt  $Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$  för  $t \geq 0$ . Då är  $\{Y(t); t \geq 0\}$  en Poissonprocess med intensitet  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .