TAMS14/TEN1 SANNOLIKHETSLÄRA GK
TENTAMEN TISDAG 17 AUGUSTI 2021 KL 08.00-12.00.

Examinator och jourhavande lärare: Torkel Erhardsson, tel. 28 14 78.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i matematisk statistik utgiven av matematiska institutionen. Räknedosa med tömda minnen.

Tentamen består av 6 uppgifter värda 3 poäng vardera. Betygsgränser: 8 poäng för 3, 11.5 poäng för 4, 15 poäng för 5. Resultatet meddelas via e-post.

Uppgift 1

Tre bagare, Frasse, Janos och Hilding, har sannolikheterna 0.02, 0.07 respektive 0.18 att misslyckas med ett bakverk. I bageriet där de jobbar gör Frasse 50% av alla bakverk, Janos 10% och Hilding 40%. Ett bakverk väljs ut slumpmässigt ur en dags produktion.

(a) Vad är sannolikheten att bakverket är misslyckat?

(b) Bakverket visar sig vara lyckat. Givet detta, vad är den betingade sannolikheten att det bakats av Frasse?

Uppgift 2

Den tid (i år) som en fyrhjulsdriven bil av ett visst märke fungererar utan fel kan ses som en stokastisk variabel X med fördelningsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(1+(x-1)^3)/3}, & \text{för } x > 0; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

(a) En familj ska vistas ett år i Afrika och vill ha en så driftsäker bil som möjligt. De planerar att köpa en bil som fungerat utan fel i a år. Hur bör a väljas? Besvara frågan genom att maximera den betingade sannolikheten $P(X > a + 1 | X > a)$.

(b) Beräkna medianen för X.

Uppgift 3

Vid strömmingsfiske med kastspö har man 4 blanka krokar på tafsen. Tillgången på strömming är mycket god. På varje kast kan man räkna med att få upp till 4 strömmingar, med sannolikheterna

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.1	0.1	0.4	0.3	0.1

Beräkna sannolikheten att man efter 100 (oberoende) kast har fått minst 230 strömmingar. Välmotiverade approximationer får användas.

Uppgift 4

I en årligen återkommande fotbollsturnering har man kommit fram till kvartsfinalerna. Av de åtta kvarvarande lagen är fyra högt rankade och fyra lågt rankade. Vilka lag som ska mötas bestäms genom lottning. Låt X vara det antal högt rankade lag som får möta ett annat högt rankat lag i en kvartsfinal.

(a) Ange värdemängden för X, d.v.s., de värden som X kan anta.

(b) Beräkna sannolikhetsfunktionen för X.

Uppgift 5

En tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}, & \text{då } 0 < x < \infty \text{ och } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna $E(X)$, $E(Y)$ och $C(X, Y)$.

Uppgift 6

Taxibilar ankommer till en taxistolpe enligt en Poissonprocess med intensitet 1 (per minut). Vid tid $t = 0$ ställer sig herr Andersson vid stolpen för att vänta på en taxi. Vid tid $t = 2$ ställer sig fru Bengtsson där, av samma skäl. Herr Andersson, som är först vid stolpen, tar den först ankommande taxin. Givet att herr Andersson fortfarande står vid stolpen när fru Bengtsson kommer dit, beräkna:

(a) Den betingade sannolikheten att herr Anderssons totala väntetid vid stolpen blir längre än fru Bengtssons väntetid.

(b) Den betingade sannolikheten att herr Anderssons totala väntetid vid stolpen blir mer än dubbelt så lång som fru Bengtssons väntetid.