TAMS14/TEN1 SANNOLIKHETSLÄRA GK
TENTAMEN TISDAG 19 OKTOBER 2021 KL 08.00-12.00.

Examinator och jourhavande lärare: Torkel Erhardsson, tel. 28 14 78.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i matematisk statistik utgiven av matematiska institutionen. Räknedosa med tömda minnen.

Tentamen består av 6 uppgifter värda 3 poäng vardera. Betygsgränser: 8 poäng för 3, 11.5 poäng för 4, 15 poäng för 5. Resultatet meddelas via e-post.

Uppgift 1

I en tennisturnering har man kommit fram till semifinalerna: spelare A mot spelare B, och spelare C mot spelare D. Antag att A:s vinstsannolikhet i matcher mot B, C och D är 0.7, 0.8 respektive 0.4; att B:s vinstsannolikhet i matcher mot C och D är 0.2 respektive 0.9; och att C:s vinstsannolikhet i matcher mot D är 0.3. Alla matcher kan anses oberoende. Beräkna sannolikheten att A blir slutsegrare i turneringen.

Uppgift 2

För en viss typ av hiss kan den maximala lastkapaciteten X (= den maximala last i kg hissen kan ta utan att överbelastas) betraktas som en $\mathrm{N}(5000, 300)$-fördelad stokastisk variabel. En sådan hiss har installerats i kontorshuset Giraffen. Den tyngsta last Y som hissen i Giraffen utsätts för under ett år kan ses som en $\mathrm{N}(4000, 400)$-fördelad stokastisk variabel (oberoende av X).

(a) Beräkna sannolikheten att hissen i Giraffen överbelastas under ett visst år.

(b) Beräkna $P(X \leq 5000 | X > 4500)$.

Uppgift 3

Två säkringar har de stokastiska livslängderna X respektive Y (enhet: år), där (X, Y) har den simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^{-x/2-y/3}, & \text{då } x > 0 \text{ och } y > 0; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

(a) Beräkna de marginella täthetsfunktionerna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.

(b) Avgör om X och Y är oberoende. Svaret måste motiveras.

(c) Beräkna sannolikheten att åtminstone en av säkringarna har slutat att fungera två år efter det att båda har monterats in.

Uppgift 4

Nederbördsmängden (i mm) under ett dygn kan betraktas som en stokastisk variabel $X = YZ$, där Y och Z är oberoende stokastiska variabler med följande egenskaper: $P(Y = 0) = P(Y = 1) = 0.5$, och Z är exponentialfördelad med väntevärde 3. (Detta kan tolkas så att sannolikheten att det regnar är 0.5, och givet att det regnar så är nederbördsmängden $\exp(\frac{1}{3})$-fördelad.) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för X.

Uppgift 5

Ett mord har begåtts, och på brottsplatsen hittas blodfläckar från en okänd person. Man vet att den okände tillhör en stor grupp på totalt N personer, där alla är lika sannolika. Efter att ha bestämt den okändes DNA-profil, kontrollerar man denna mot en databas som innehåller DNA-profiler från m personer ur den stora gruppen ($m < N$). Alla personer kan anses ha oberoende DNA-profiler, och sannolikheten att en oskyldig persons DNA-profil ska matcha den okändes är p.

Det visar sig att exakt en person i databasen, nummer 13, har en DNA-profil som matchar den okändes. Beräkna den härav betingade sannolikheten att nummer 13 och den okände är samma person. (Om du vill får du använda de numeriska värdena $N = 10^7$, $m = 10^5$ och $p = 10^{-8}$.)

Uppgift 6

En tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{(1+x)^2(1+xy)^2}, & \text{då } x > 0 \text{ och } y > 0; \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna täthetsfunktionen för den stokastiska variabeln $Z = XY$.