

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 79 / TEN 1

18 januari 2020, klockan 8.00-12.00

Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

- (1) Anta att 1% av populationen är snarkare. Vi tar en person från populationen på måfå och vill veta om han/hon är snarkare eller inte. Testet man kan använda ger ett rätt svar med sannolikhet 0.99 oavsett man är snarkare eller inte.
 - (a) Bestäm sannolikheten att testet säger att en person tagen på måfå är snarkare. (1.5p)
 - (b) Anta att testet säger att den valda personen är snarkare. Hur stor är då sannolikheten att han/hon faktisk är snarkare? (1.5p)
- (2) Man tror att en supernova exploderar genomsnittligt en gång/300 år. Anta att explosionerna bildar en Poissonprocess. Beräkna sannolikheten att
 - (a) det exploderar minst två supernovor under en viss 60 års tidsperiod. (1.5p)
 - (b) det exploderar inga supernovor under en viss 450 års tidsperiod. (1.5p)
- (3) En Astronom vill mäta (i ljusår) avståndet mellan sitt observatorium och en viss stjärna. Han vet att varje gång han mäter avståndet får han inte avståndet exakt. Därför mäter astronomen avståndet många gånger och använder medelvärdet av sina mätningar som en definitiv skattning för avståndet. Han antar att värden av mätningarna är oberoende och likafördelade stokastiska variabler som har väntevärdet d (det riktiga avståndet i ljusår) och variansen 4 (ljusår²).
 - (a) Antag att astronomen mäter avståndet 25 gånger. Bestäm sannolikheten att hans skattning överstiger $d + 0.5$ ljusår. (1p)
 - (b) Hur många mätningar behöver han för att hans skattning skulle vara med sannolikhet 0.95 inom ± 0.5 ljusår från det riktiga avståndet d ? (2p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

- (4) Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har den simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & \text{om } 0 < y < x < \infty \\ 0 & \text{annars} \end{cases} .$$

- (a) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. (1p)
- (b) Är X och Y oberoende? (0.5p)
- (c) Beräkna $P(Y > 1 | X > 1)$. (1.5p)

- (5) En person åker först med buss 1, sedan med buss 2. Väntetiderna X och Y är oberoende och likformigt fördelade över intervallet $(0, 10)$ respektive $(0, 8)$, där enheten är minuter. Bestäm sannolikheten att personen får vänta sammanlagt minst 16 minuter på de båda bussarna. (3p)
- (6) X_1, \dots, X_n är oberoende stokastiska variabler som alla är $N(\mu, 0.2)$, dvs. normalfördelade med väntevärde μ och standardavvikelse 0.2 .
- (a) Ange fördelningen (typ och parametrar) för $\bar{X} - \mu$ där $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. (1p)
- (b) Beräkna $P(|\bar{X} - \mu| > 0.2/\sqrt{n})$. (1p)
- (c) Hur stort måste n vara för att $P(|\bar{X} - \mu| > 0.01)$ skall understiga 0.001? (1p)

Ledning: Använd $\Phi(3.29) = 1 - 0.0005$.

Lösningar

(1) Låt

$$E = \{\text{en person tagen på måfå är snarkare}\}$$

och

$$F = \{\text{testet säger att en person tagen på måfå är snarkare}\}.$$

Då är

$$P(E) = 0.01, \quad P(F|E) = P(F^c|E^c) = 0.99$$

och

$$P(F|E^c) = 1 - P(F^c|E^c) = 1 - 0.99 = 0.01.$$

(a) Lagen om total sannolikhet ger

$$P(F) = P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0198.$$

(b) Från Bayes Formel får vi

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99} = \frac{1}{2}.$$

(2) Låt $N(t)$, $t \geq 0$, vara antalet explosioner i $(0, t)$. Då är $N(t)$, $t \geq 0$, en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 1$ (enheten 300 år).

(a)

$$\begin{aligned} P\left(N\left(\frac{1}{5}\right) \geq 2\right) &= 1 - P\left(N\left(\frac{1}{5}\right) = 0\right) - P\left(N\left(\frac{1}{5}\right) = 1\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{5}} - \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}} = 0.0175. \end{aligned}$$

(b)

$$P\left(N\left(\frac{3}{2}\right) = 0\right) = e^{-\frac{3}{2}} = 0.223.$$

(3) Låt X_i beteckna resultatet av den i :e mätningen och $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Här har vi $n = 25$. Sökt är

$$P(\bar{X} > d + 0.5).$$

Det gäller att

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > d + 0.5) &= 1 - P(\bar{X} \leq d + 0.5) \\ &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - E[X_1]}{D(X_1)/\sqrt{n}} \leq \frac{0.5}{2/5}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1.25) = 0.1056. \end{aligned}$$

(b) Sökt är n sådan att

$$0.95 = P\left(d - 0.5 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq d + 0.5\right).$$

Enligt Centrala gränsvärdesatsen

$$0.95 = P\left(-0.5 \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \frac{\bar{X} - d}{2/\sqrt{n}} \leq 0.5 \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right).$$

Detta ger också

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.975.$$

Ur tabellen fås

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \approx 1.96 \quad \text{som medför att} \quad n \approx (4 \cdot 1.96)^2 = 61.5.$$

Astronomen behöver alltså 62 mätningar.

(4) (a)

$$f_X(x) = \int_0^x 2e^{-x-y} dy = 2e^{-x}(1 - e^{-x}) \text{ om } x > 0, \quad f_X(x) = 0 \text{ om } x \leq 0.$$

$$f_Y(y) = \int_y^\infty 2e^{-x-y} dx = 2e^{-2y} \text{ om } y > 0, \quad f_Y(y) = 0 \text{ om } y \leq 0.$$

(b) Eftersom $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, så är X och Y inte oberoende.

(c)

$$P(Y > 1 | X > 1) = \frac{P(\{Y > 1\} \cap \{X > 1\})}{P(X > 1)}$$

där $P(X > 1) = \int_1^\infty 2e^{-x}(1 - e^{-x}) dx = 2e^{-1} - e^{-2}$ och

$$\begin{aligned} P(\{Y > 1\} \cap \{X > 1\}) &= \int_1^\infty \int_1^x 2e^{-x-y} dy dx \\ &= \int_1^\infty 2e^{-x}(e^{-1} - e^{-x}) dx = e^{-2} \end{aligned}$$

Alltså fås $P(Y > 1 | X > 1) = 1/(2e - 1) \approx 0.23$.

(5) Se lösningar till lektionsuppgifter, 4.6.

<http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf>

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.18. Beakta att det inte är nödvändigt att använda $\lambda_{0.0005}$: Från

$$1 - \Phi\left(\frac{0.01}{0.2/\sqrt{n}}\right) \leq 0.0005$$

får vi

$$\Phi\left(\frac{0.01}{0.2/\sqrt{n}}\right) \geq 1 - 0.0005.$$

Ledningen medför nu att

$$\frac{0.01}{0.2/\sqrt{n}} \geq 3.29.$$