LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 79 / TEN 1

17 mars 2020, kl. 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistisk utgiven av MAI, och ett ytterligare formel-blad (framsida och baksida).

(1) Antag att sannolikheten att en godtyckligt vald person i Sverige kommer att träffas av blixten under det närmaste året är 10^{-7}.

(a) Om det finns 9 miljoner invånare i sverige, hur stor är då sannolikheten att minst tre personer kommer att träffas av blixten under det närmaste året? (1.5p)

(b) Om blixtnedslagen under de därpå följande tre åren är oberoende av dem under det närmaste året, hur stor är då sannolikheten att sammanlagt minst två personer kommer att träffas av blixten under de närmaste fyra åren? (1.5p)

Ledning: Om $X \sim Bin(n, p)$ så är X approximativt $Po(np)$-fördelad.

(2) I affärer avrundas numera det totala priset till närmaste hela krona. Detta innebär att felet för varje kund kan anses vara likformigt fördelat på intervallet (-0.5, 0.5). Under en dag handlar 500 personer i en viss affär.

Beräkna sannolikheten för att kassans avvikelse från det inslagna beloppet under dagen i affären ovan är mer än 5 kr, dvs att absolutbeloppet för det totala felet pga. avrundningen är större än 5 kr. (3p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

(3) I ett land med tvåpartisystem kallas partierna "de gula" och "de lila". 50% av männen röstar på de gula och 50% på de lila. 58% av kvinnorna röstar på de gula och 42% på de lila. Det finns lika många kvinnor som män i landet.

(a) Hur stor andel av rösterna får de gula respektive de lila? (1.5p)

(b) Vad är sannolikheten att en person som röstade på de lila är kvinna? (1.5p)

(4) Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ och varians σ^2 och låt $Y = bX + a$, där a och b är konstanter med $b(b+1) \neq 0$.

(a) Beräkna väntevärdet och variansen av Y och $Z = X + Y$. (2p)

(b) Bestäm kovariansen och korrelationen mellan Y och Z. (1p)

(5) $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler som alla är $N(\mu, 0.2)$, dvs. normalfördelade med väntevärde μ och standardavvikelse 0.2 .

(a) Ange fördelningen (typ och parametrar) för $\bar{X} - \mu$ där $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. (1p)

(b) Beräkna $P(|\bar{X} - \mu| > 0.2/\sqrt{n})$. (1p)

(c) Hur stort måste n vara för att $P(|\bar{X} - \mu| > 0.01)$ skall understiga 0.001? (1p)

(6) (a) Bestäm konstanten c så att

$$f(x) = \begin{cases} c/\sqrt{x+1} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases} .$$

blir en täthetsfunktion. (1.5p)

(b) Beräkna sannolikheten att en stokastisk variabel med denna täthetsfunktion antar ett positivt värde. (1.5p)

Ledning: $\int 1/\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{x+1} + C$, $-1 < x < 1$.

Lösningar

(1) Låt X vara antalet som träffas av blixten ett typiskt år. Då är

$$X \sim Bin(9 \cdot 10^6, 10^{-7}) \approx Po(0.9)\,.$$

(a)

$$P(X \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P(X = k) \approx 1 - e^{-0.9}(1 + 0.9 + 0.9^2/2) = 0.0629\,.$$

(b) Låt X_i vara antalet som träffas av blixten under år $i = 1, 2, 3, 4$ och låt $Y = \sum_{i=1}^{4} X_i$. Då gäller att

$$Y \sim Bin(4 \cdot 9 \cdot 10^6, 10^{-7}) \approx Po(3.6)\,.$$

Den sökta sannolikheten ges av

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(X = 1) \approx 1 - e^{-3.6}(1 + 3.6) = 0.8743\,.$$

(2) Sätt X_k = felet vid k:te kundens betalning. Det gäller att $X_k \sim U(-0.5, 0.5)$, $E[X_k] = 0$, $Var(X_k) = 1/12$. Dessutom har man

$$Y = \text{totala felet} = \sum_{k=1}^{500} X_k\,.$$

Enligt centrala gränsvärdessatsen är Y approximativt $N(0, 500/12) = N(0, 6.45^2)$-fördelad. Detta ger

$$\begin{aligned}
P(|Y| > 5) &= 1 - P(-5 \leq Y \leq 5) \\
&= 1 - P\left(-0.78 \leq \frac{Y}{6.45} \leq 0.78\right) \\
&\approx 2 - 2\Phi(0.78) \\
&= 0.44\,.
\end{aligned}$$

(3) Tag en väljare på måfå och låt K vara händelsen att väljaren är en kvinna och L händelsen att väljare röstar på de lila. I uppgiften ges $P(L|K^c) = 0.5$, $P(L|K) = 0.42$, $P(K) = 0.50$.

(a) Vi söker $P(L)$ och $P(L^c) = 1 - P(L)$. Enligt lagen om total sannolikhet gäller

$$P(L) = P(L|K)P(K) + P(L|K^c)P(K^c) = 0.42 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.46$$

$$P(L^c) = 1 - P(L) = 0.54.$$

(b) Vi söker $P(K|L)$. Enligt Bayes sats är

$$P(K|L) = \frac{P(L|K)P(K)}{P(L)} = \frac{0.42 \cdot 0.5}{0.46} = 0.457\,.$$

(4) (a)

$$E[Y] = bE[X] + a = b\mu + a\,, \quad Var(Y) = Var(bX + a) = b^2\sigma^2$$

och

$$E[Z] = E[X]{+}E[Y] = (b{+}1)\mu{+}a\,, \quad Var(Z) = Var((b{+}1)X{+}a) = (b{+}1)^2\sigma^2\,.$$

(b)

$$Cov(Y, Z) = Cov(bX + a, (b + 1)X + a) = Cov(bX, (b + 1)X) = b(b + 1)\sigma^2$$

och

$$\rho(Y, Z) = \frac{Cov(Y, Z)}{\sqrt{Var(Y) \cdot Var(Z)}} = \begin{cases} 1 & \text{if } b(b + 1) > 0 \\ -1 & \text{if } b(b + 1) < 0 \end{cases}\,.$$

(5) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.18.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 3.14.