LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 79 / TEN 1

18 augusti 2020, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Alla hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser 3: minst 8 poäng, 4: minst 11.5 poäng, 5: minst 15 poäng (av 18)

(1) Låt den simultana täthetsfunktionen av X och Y vara

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x(1-y) & \text{om } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- (a) Beräkna de marginella täthetsfunktionerna. Är X och Y oberoende? (1.5p)
- (b) Bestäm $P(X > Y)$. (1.5p)

(2) I en låda ligger fyra symmetriska tärningar: två röda, en svart och en vit. De två röda är numrerade 1, 2, 3, 4, 5, 6. Den svarta är numrerad 1, 1, 3, 5, 5, 5 och den vita 2, 2, 4, 6, 6, 6. En tärning tages på måfå ur lådan och kastas.

- (a) Låt $A = \{\text{erhålla en sexa}\}$ och betrakta händelserna $B_1 = \{\text{dra en röd tärning}\}$, $B_2 = \{\text{dra en svart tärning}\}$, $B_3 = \{\text{dra en vit tärning}\}$. Bestäm $P(A|B_i)$, $i = 1, 2, 3$. (1p)
- (b) Vad är sannolikheten att få en sexa? (1p)
- (c) Vad är då sannolikheten att tärningen är röd under förutsättning att vi erhållit en sexa? (1p)

(3)
- (a) För en exponentialfördelad stokastisk variabel X med parametern λ bestäm $E[3X - X^2]$. (1p)
- (b) För en likformigt fördelad på $(0, 2)$ stokastisk variabel Y bestäm $Var(3Y - Y^2)$. Använd $E[Y^k] = \int y^k f_Y(y)\, dy$. (2p)

(4) Ett kretskort i en dator består av fyra elektroniska komponenter. Komponenterna fungerar oberoende av varandra och livslängden (mätt i år) för en komponent beskrivs av en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{om } x \geq 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Var är sannolikheten att alla komponenter fortfarande fungerar efter två år? (1.5p)
- (b) Vad är sannolikheten att minst tre av komponenterna fortfarande fungerar efter två år? (1.5p)

(5) En nybörjar-roddare uppskattar att längden han kommer på ett godtyckligt årtag (mätt i enheten meter) är en viss stokastisk variabel med väntevärde 10 och varians 9. Bestäm approximativt sannolikheten att han klarar att ro 3000 meter på 295-årtag under antagandet att det inte finns några samband mellan längden på olika årtag. (3p)

(6) De två stokastiska variablerna X och Y är oberoende och likformigt fördelade på intervallet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(a) Bestäm täthetsfunktionen f_{X+Y} av $X+Y$. (1p)

(b) Beräkna väntevärde och varians för $X+Y$. (1p)

(c) Beräkna korrelationen mellan $X+Y$ och X. (1p)

<u>*Ledning:*</u> För (a) använd formeln $f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) \cdot f_Y(y)\, dy$, $a \in \mathbb{R}$. För (c), kom ihåg att korrelationen mellan två stokastiska variabler X och Y ges av

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}\,.$$

Lösningar

(1) (a)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f(x,y)\,dy \\ &= \int_0^1 4x(1-y)\,dy \\ &= 4x\int_0^1 (1-y)\,dy \\ &= 2x\,, \quad 0<x<1, \end{aligned}$$

utanför intervallet (0,1) är $f_X(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f(x,y)\,dx \\ &= \int_0^1 4x(1-y)\,dx \\ &= (1-y)\int_0^1 4x\,dy \\ &= 2(1-y)\,, \quad 0<y<1, \end{aligned}$$

utanför intervallet (0,1) är $f_Y(y) = 0$. Slumpvariablerna X och Y är obeoende eftersom $f_X(x)\cdot f_Y(y) = f(x,y)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\begin{aligned} P(X>Y) &= \int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1\int_0^x 4x(1-y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 4x\int_0^x (1-y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 4x\cdot\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\,dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6}\,. \end{aligned}$$

(2) Då gäller $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ och $B_i \cap B_j = \emptyset$ om $i \neq j$.

(a),(b)

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

där $P(B_1) = \frac{2}{4}$, $P(A|B_1) = \frac{1}{6}$, $P(B_2) = \frac{1}{4}$, $P(A|B_2) = 0$, och $P(B_3) = \frac{1}{4}$, $P(A|B_3) = \frac{3}{6}$. Vi får

$$P(A) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} = \frac{5}{24}.$$

(c)

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{2}{5}.$$

(3) (a)

$$E[3X - X^2] = 3E[X] - E[X^2] = 3E[X] - Var(X) - (E[X])^2 = \frac{3}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}.$$

(b)

$$E[3Y - Y^2] = 3E[Y] - E[Y^2] = 3 - \int_0^2 y^2 \cdot \frac{1}{2}\, dy = 3 - \frac{1}{6} y^3|_0^2 = \frac{5}{3},$$

$$\begin{aligned} Var(3Y - Y^2) &= E[(3Y - Y^2)^2] - (E[3Y - Y^2])^2 \\ &= 9\int_0^2 y^2 \cdot \frac{1}{2}\, dy - 6\int_0^2 y^3 \cdot \frac{1}{2}\, dy + \int_0^2 y^4 \cdot \frac{1}{2}\, dy - \frac{25}{9} \\ &= \frac{3}{2} y^3|_0^2 - \frac{3}{4} y^4|_0^2 + \frac{1}{10} y^5|_0^2 - \frac{25}{9} \\ &= \frac{19}{45}. \end{aligned}$$

(4) (a) Låt T_i beteckna livslängden för komponent i ($i = 1, \dots, 4$). Vi har att

$$P(T_i \geq 2) = \int_2^\infty 1/x^2\, dx = 0.5$$

och den sökta sannolikheten blir alltså:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^4 \{T_i \geq 2\}\right) = \prod_{i=1}^4 P(\{T_i \geq 2\}) = 0.5^4 = 0.0625.$$

(b) Antalet komponenter X som fortfarande fungerar efter två år är $Bin(4, 0.5)$-fördelat, och vi får alltså:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0.5^4 + \binom{4}{4} 0.5^4 = 0.3125.$$

(5) Låt X_i vara längden av det i:te årtaget, och låt $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Vi söker $P(S_{295} > 3000)$. $E[S_n] = n \cdot E[X_1] = 10n$ och tack vare oberoendet mellan de olika årtagen blir $Var(S_n) = n \cdot Var(X_1) = 9n$. Särskilt så får vi $E[S_{295}] = 2950$ och $Var(S_{295}) = 2655$. På grund av Centrala Gränsvärdessatsen är S_n approximativt normalfördelad. Det betyder att

$$\begin{aligned} P(S_{295} > 3000) &= P\left(\frac{S_{295} - 2950}{\sqrt{2655}} > \frac{3000 - 2950}{\sqrt{2655}}\right) \\ &\approx P(Z > 0.970) = 1 - \Phi(0.970) = 1 - 0.834 = 0.166. \end{aligned}$$

(6) De två stokastiska variablerna X och Y är oberoende och likformigt fördelade på intervallet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Detta medför att

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad \text{och} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och

$$E[X] = E[Y] = 0\,, \quad Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{12}\,, \quad Cov(X,Y) = 0.$$

Alltså

(a)

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f_X(a-y)\cdot f_Y(y)\,dy & = & a+1 & \text{om} & -1 < a \le 0 \\ \int_{a-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(a-y)\cdot f_Y(y)\,dy & = & 1-a & \text{om} & 0 < a < 1 \\ & & 0 & \text{annars} & \end{cases}.$$

(b) $E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 0$, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1/6$,

(c) $Cov(X+Y, X) = Cov(X,X) + Cov(X,Y) = Var(X) = 1/12$ och

$$\rho(X+Y, X) = \frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$