

TEKNISKA HÖGSKOLAN I LINKÖPING
Matematiska institutionen
Beräkningsmatematik/Fredrik Berntsson

Tentamen TANA09 Datatekniska Beräkningar
--

Tid: 14-18, 14:e Januari, 2016

Plats: U1

Hjälpmedel:

1. Räknedosa i fickformat, med nollställt minne och utan instruktionsbok.

Examinator: Fredrik Berntsson

Maximalt antal poäng: 25 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

Jourhavandelärare Fredrik Berntsson (telefon 28 28 60)

Besök av jourhavande lärare sker ungefär 15.15 och 17.15.

Resultat meddelas via epost senast 22:a Januari.

Visning Sker vid examinatorers kontor (B-huset, 2:vån, Ing 23-25) Tisdag 24:e januari. Klockan 12.15-12.45. Välkomna!

Lycka till!

- (3p) **1:** En viss numerisk metod har ett trunkeringsfel som kan skrivas $R_T \approx Ch^p$, där C är en konstant, p är ett heltal, och h är en diskretiseringsparameter. Metoden beräknar ett värde $T(h)$ som är en approximation av det exakta värdet T_0 . Vi beräknar $T(h)$ för ett antal olika h -värden och får följande tabell:

h	0.4	0.2	0.1	0.05
$T(h)$	3.100	2.701	2.604	2.578

Utnyttja tabellen för att bestämma p . Redovisa beräkningarna.

- (5p) **2:** Givet är en matris A och en vektor $\bar{b}$ enligt nedan.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1.23 \\ -0.34 \\ 1.78 \end{pmatrix}$$

- LU -faktorisera matrisen A .
- Använd LU -faktoriseringen för att lösa ekvationssystemet $Ax = \bar{b}$.
- Antag nu att vektorn $\bar{b}$ innehåller korrekt avrundade närmevärden till det exakta högerledet b . Gör en feluppskattning och bestäm en övre gräns för relativa felet i den beräknade Lösningsvektorn.

Du får utnyttja att $\|A^{-1}\|_\infty = 1$.

- (3p) **3:** Vi vill beräkna funktionen

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

för små värden på x på en dator med avrundningsenhet $\mu = 1.11 \cdot 10^{-16}$. Taylor utveckling visar att

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{6},$$

men då uttrycket beräknas fås en skillnad $|\bar{f}(10^{-7}) - \frac{1}{6}| \approx 5.4 \cdot 10^{-3}$. Förklara ovanstående resultat genom att utföra en beräkningsfelsanalys som tydligt visar hur stort felet kan bli då $f(x)$ beräknas på datorn. För analysen får du anta att alla beräkningar kan utföras med ett relativt fel högst μ .

Tips Taylorutvecklingen av $\sin(x)$ är $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

- (4p) **4:** Följande tabell med korrekt avrundade funktionsvärden är given

x	0.4	0.6	0.7
$f(x)$	1.78	1.53	1.39

- Använd linjär interpolation för att beräkna en approximation till $f(0.48)$. Gör även en fullständig feluppskattning.
- Egentligen ville vi beräkna en approximation av $f(A)$, där $A = 0.48 \pm 0.01$. Uppskatta det tillkommande felet som uppstår på grund av att A inte är känd exakt.

(5p) **5:** Icke-linjära ekvationer $f(x) = 0$ kan lösas genom fixpunktsiteration. Man formulerar då om problemet så att en rot x^* , dvs $f(x^*) = 0$ blir en fixpunkt till en iteration $x_{n+1} = g(x_n)$, dvs $x^* = g(x^*)$.

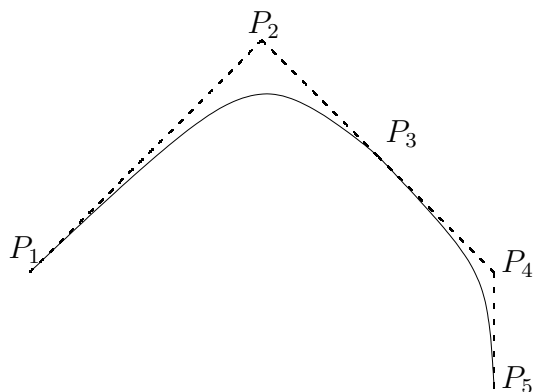
- a) Visa att iterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ är konvergent om $|g'(x^*)| \leq C < 1$ och start gissningen x_0 ligger tillräckligt nära roten.
- b) Ekvationen $f(x) = 2x - \cos(x^2) = 0$ har en rot $x^* \approx 0.48$. Formulera en fixpunktsiteration för att hitta en rot till $f(x) = 0$ och visa att den valda metoden är konvergent.
- c) En möjlig metod för att lösa ekvationer $f(x) = 0$ är Newton-Raphsons metod. Formulera Newton-Raphsons metod och härled den iterationsformel som fås då Newton-Raphsons metod tillämpas på ekvationen $f(x) = 2x - \cos(x^2) = 0$. (Du behöver inte utföra några beräkningar)
- d) Då ekvationen $f(x) = 2x - \cos(x^2) = 0$ löses med Newton-Raphsons metod fås ett närmevärde $\bar{x} = 0.486106 \approx x^*$. Uppskatta felet i detta närmevärde.

(5p) **6:** En kvadratisk Beziér kurva ges av uttrycket

$$p(t) = (1-t)^2 P_1 + 2(1-t)t P_2 + t^2 P_3, \quad 0 < t < 1,$$

där P_1 , P_2 och P_3 är styrpunkter.

- a) Visa tydligt att kurvans tangent i startpunkten $t = 0$ är parallell med vektorn $P_2 - P_1$.
- b) Antag att vi vill sätta samman två kvadratiske Beziér kurvor till en längre kurva. Vi väljer då totalt fem styrpunkter enligt följande,



Styrpunkten P_3 är gemensam för de bägge kurvavsnitten. Vi har valt $P_2 = (2, 6)^T$, $P_3 = (3, 5)^T$ och $P_5 = (6, 1)$. Visa tydligt hur punkten P_4 skall väljas så att kurvans tangent är kontinuerlig i skarvpunkten P_3 och så att kurvans riktning är vertikal i slutpunkten P_5 .

- c) Antag att vi istället vill sätta samman två kubiska Beziér kurvor till en sammanhängande kurva. Hur många styrpunkter behöver vi då totalt? Visa i en tydlig skiss hur punkterna skall placeras längs kurvan. Formulera ett lämpligt villkor på styrpunkterna som garanterar att kurvans tangentriktning blir kontinuerlig i skarvpunkten.