TANA17 Matematiska beräkningar med Matlab

Datorlektion 1. Vektorer och Matriser

1 Inledning

I denna övning skall du träna på att använda Matlab för enklare beräkningar och grafik. För att lösa uppgifterna så smidigt som möjligt så öppna en ny fil i editorn där du skriver in de kommandon som löser en uppgift. För att enkelt hitta i filen kan du lägga in kommentarer som

För att köra kommandona markeras de med muspekaren, högerklicka, och välj Evaluate Selection. De dubbla %-tecknen gör att en sektion skapas i filen. Ett alternativ är att välja den sektion du vill köra och klicka på pilen *Run Section*.

2 Elementära operationer och funktioner

I MATLAB finns variabler för lagring av rektangulära matriser med komplexa element. Eftersom reella skalärer, vektorer och matriser endast utgör specialfall så kan naturligtvis även dessa lagras. Variabelnamnen utgörs av siffror eller bokstäver ur det engelska alfabetet. Första tecknet får dock ej vara en siffra.

Addition, subtraktion och multiplikation utföres med de vanliga symbolerna och räknelagarna. Vill vi exempelvis beräkna polynomet $p(x) = 2 - x + x^3$ i punkten x = -1.5 skriver vi

där symbolen ~ betyder exponent. De flesta standard funktioner som sin(), exp(), tan(), etc, finns definierade i Matlab. Vi kan alltså exempelvis beräkna funktionen:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + 1}{\cos(x)},$$

för ett visst värde på x genom att skriva kommandot:

>> f = (exp(-x)+1)/cos(x)

Uppgift 2.1 Skapa två variabler x och y som ges värdena 1.5 respektive 2.7. Beräkna sedan z = x + y. Använd disp() funktionen för att skriva ut resultatet.

Uppgift 2.2 Kontrollera att $e^{i\pi} = -1$. Använd funktionerna exp, sqrt, och pi.

Uppgift 2.3 Beräkna funktionen $f(x) = x^2(1-x)^2$ för x = 0.6 samt funktionen $g(x) = e^{3x} \sin(4x)$ för x = 2.3. Ange de funktionsvärden du får.

Uppgift 2.4 Då $\arctan(1) = \pi/4$ kan vi kontrollera hur noggrann implementationen av funktionen är genom att beräkna 4*atan(1)-pi. Utför beräkningen.

3 Att skapa vektorer och matriser

I Matlab kan man även enkelt definiera vektorer och matriser. Exempelvis ger

en 3×1 vektor med elementen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 3$. Vektorer kan sedan användas i uträkningar precis som skalärer. Tecknet ; skall tolkas som radbyte. På liknande sätt bildar man en 2×3 matris genom att skriva

Uppgift 3.1 Bilda två vektorer $x = (1.0 \ 1.5 \ -3.0)^T$ och $y = (-2.0 \ 0.0 \ 2.3)^T$ samt beräkna uttrycket

z = 3.5x - y.

Titta på resultatet genom att skriva disp(z). Du kan även titta på endast en komponent genom att skriva exempelvis z(1).

Uppgift 3.2 Bilda en rad vektor $x \mod n = 10$ element. Alla element skall vara noll utom $x_3 = -1.5$ och $x_7 = 2.2$. Använd funktionen zeros() och tilldelningar x(3)=-1.5.

Tips: Du kan skriva help zeros så får du tillgång till en kort hjälptext som beskriver funktionen zeros.

Uppgift 3.3 Skriv in följande data:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bilda sedan $(AB)^T$ och $B^T A^T$. Blir resultatet som ni förväntade er?

Uppgift 3.4 Bilda en 2×2 matris A innehållande enbart ettor genom att använda funktionen ones. Skriv sedan

>> B = [A, 2*A]

och beskriv resultatet. \Box

Uppgift 3.5 (Svår) Skapa nedanstående 10 × 10-matris. Använd diag och ones.

(2	1 2	1)	١
	1	·.		۰.		
		•	1	2	1	
ĺ				1	2)	/

Skapa sedan en ny matris genom att först lägga till en rad med ettor och sedan en kolumn med 2:or (dvs element (11,11)=2).

Uppgift 3.6 Använd **ones** för att skapa en 6×2 matris A som enbart innehåller ettor. Skapa sedan en 2×3 matris B som innehåller slumptal med hjälp av kommandot **rand**. Bilda produkten C = AB, och använd funktionen **size** för att kontrollera att matrisen C:s dimensioner stämmer.

Ofta vill man bilda vektorer som innehåller element som är jämnt fördelade över ett intervall. Detta kan göras effektivt i Matlab genom kolon-notation. Skriver vi

så bildas en radvektor där x(1) = 4 och x(11) = 5. Avståndet mellan elementen blir x(2)-x(1) = 0.1. Vill vi istället ha en kolumnvektor används transponat '.

Uppgift 3.7 Bilda en vektor $x = (1.0 \ 1.5 \ 2.0 \ 2.5 \ 3.0)^T$ genom att skriva

Beräkna sedan y=x+x och z=x.*x. Vad blir resultatet? $\hfill \Box$

Uppgift 3.8 En *radvektor* $x = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ skapas genom att skriva x=1:4. Hur kan en kolumn kolumn vektor $y = (10 \ 10.5 \ 11 \ 11.5 \ 12)^T$ skapas?

Uppgift 3.9 Bilda en 3×1 vektor $v = (1, -3, 2)^T$. Jämför resultaten man får av v'*v och v.*v. Kan du skriva v*v?

Uppgift 3.10 Låt

$$A = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

Jämför resultaten man får av A*A, A^2, A.*A och A.^2. Vad innebär punkten? $\hfill \Box$

 $\mathbf{3}$

Uppgift 3.11 Vi vill beräkna funktionen $f(x) = \cos(x)x^2$, för 10st jämt utspridda x-värden på intervallet $0 \le x \le 2$. Skriv de Matlab kommandon som krävs.

Tips Ifall du inte vill använda kolon-notation så finns ett kommando linspace. Läs hjälp texten!

4 Indexering och Summor

En $n \times m$ matris A kan ses som ett antal reella tal a_{ij} ordnade i rader och kolumner. Vill vi exempelvis skriva ut ett enskilt elements värde skriver vi,

>> disp(A(2,3))

och elementet på plats rad 2 och kolumn 3 skrivs ut. Enskilda elemnt kan även förekomma i tilldelningar av typen A(2,3)=7.

Vi kan även indexera hela, eller delar, av en rad eller en kolumn genom att skapa vektorer som anger vilka platser vi är intresserade av. Exempelvis skriver följande kommando ut de första tre elementen i andra kolumnen av matrisen A:

>> disp(A(1:3,2));

Vill vi ersätta en hel rad ur en matris A med nollor kan vi skriva

>> [n,m]=size(A); A(2,1:m)=zeros(1,m);

Då vi använder tilldelning på detta sätt måste antalet element respektive vektorer stämma överens. I fallet då en hel rad eller kolumn skall anges finns även skrivsättet A(:,1) för första kolumnen exempelvis. Det finns många kreativa sätt att utnyttja kolon notation för att skapa vektorer med index för att lösa problem som vi skall se i nedanstående övningar.

Uppgift 4.1 Skapa en 5×6 matris A som endast innehåller nollor. Lägg in ettor på platserna (2, 1), (4, 3), och (5, 1). Ersätt slutligen hela sista kolumnen med tvåor. Använd tilldelningar samt funktionerna **zeros** och **ones**.

Uppgift 4.2 (Svår) Skapa en vektor $x = (1, 2, ..., 9)^T$. Byt sedan ut de jämna elementen mot nollor så att vektorn blir

 $x = (1, 0, 3, 0, 5, \dots, 0, 9)^T.$

Skapa sedan på liknande sätt en vektor

$$x = (1, -2, 3, -4, 5, \dots, -8, 9)^T$$
.

Uppgift 4.3 Beräkna summan

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{1+k^2},$$

genom att skapa en vektor med de möjliga värdena på k, beräkna termerna genom elementvisa operationer, och slutligen använda sum.

Uppgift 4.4 Den Euklidiska längden hos en vektor x i \mathbb{R}^n definieras som

$$E = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Skriv de Matlab rader som krävs för att utföra beräkningen. \Box

Uppgift 4.5 Skapa en vektor x innehållande n = 20 likformigt fördelade slumptal på intervallet [0,1] med hjälp av funktionen rand. Beräkna medelvärdet av alla elemment med hjälp av någon av funktionerna sum eller mean. Medelvärdet borde bli ungefär 0.5. Stämmer det? Beräkna även medelvärdet av vartannat tal i vektorn, dvs x_1, x_3, \ldots, x_{19} . Vi borde få ungefär 0.5 här också.

5 Grafik i 2D och 3D

I Matlab finns enkla kommandon för två- och tre-dimensionell grafik. Kommandot plot används för att generera två-dimensionell grafik. Kommandot clf används för att rensa grafikfönstret.

Vektorn x ritas mot vektorn y med kommandot plot(x,y) (heldragen kurva) eller plot(x,y,'+r') (punkter markerade med röda plus). Några fler varianter på plot-kommandot finnns. Man kan välja olika typer av punkter och linjer och färger (se help plot). Exempelvis gör raderna

>> x = [0 1 3 4]; >> y = [2.0 0.7 -1.3 2.3]; >> plot(x,y);

att de fyra punkterna (x_k, y_k) sammanbinds med räta linjer. Testa gärna!

För att kunna rita en graf över en funktion f(x) behöver man alltså först en vektor med att antal *x*-koordinater x_k . Man beräknar sedan en vektor *y* med motsvarande funktionsvärden $y_k = f(x_k)$.

Uppgift 5.1 Skapa en vektor x=(-1:0.5:1), och y=x.². Använd plot kommandot för att rita gröna * i punkterna (x_i, y_i) . Använd help plot för att ta reda på hur man gör. Använd sedan plot för att sammanbinda punkterna med svarta linjer. Kom ihåg hold on.

Uppgift 5.2 Skapa en ny "tätare" vektor x=(-1:0.01:1), och $y=x.^2$. Använd sedan plot för att sammanbinda punkterna (x_i, y_i) med blåa linjer. Anteckna kommandona. Vill du kan du plotta i samma fönster som tidigare.

Uppgift 5.3 Plotta funktionen $f(x) = \sin(x^2)$ på intervallet $[-\pi, \pi]$. Skriv help pi.

Uppgift 5.4 Kommandona title, xlabel, och ylabel kan användas för att namnge grafen respektive koordinataxlarna. Lägg till en titel och namnge koordinataxlarna.

Uppgift 5.5 Plotta de två funktionerna $f(x) = \cos(x)$ och $g(x) = x^2$ på intervallet [0, 1]. Bägge funktionerna skall synas i samma graf. Använd svart heldragen linje för f(x) och blå streckad linje för g(x). Använd hold on/off.

Uppgift 5.6 (Svår) Man kan även rita upp funktionsytor i Matlab. Ett exempel är Rosenbrock funktionen,

 $f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2,$

som ofta används som exempel på en funktion som är besvärlig att arbeta med inom optimeringsläran. För att rita upp funktionen för -2 < x < 2 och -1 < y < 3 behöver vi två matriser med xrespektive y-koordinater. Vi skapar dessa med kommandona:

```
>> n=100; % antalet punkter i x- och y-led.
>> x=-2+4*(0:n-1)/(n-1);
>> y=-1+4*(0:n-1)/(n-1);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
```

Vi måste sedan beräkna funktionens värden i punkterna, dvs skapa en matris Z vars element ges av $z_{ij} = f(x_{ij}, y_{ij})$. Vi gör detta med kommandot,

>> Z=(1-X).^2+100*(Y-X.^2).^2;

där .[^] ger att exponenten beräknas elementvis. Vi ritar slutligen upp ytan med kommandot

>> mesh(X,Y,Z)

Detta ger en tråd-modell av ytan som passar bra att skriva ut på papper. Mera avancerade metoder att illustrera ytor i färg finns också. Se exempelvis kommandot surf. $\hfill\square$

6 Funktionsundersökning

I Matlab finns funktioner max och min som hittar det största repsektive minsta elementet i en vektor. Skriver vi

>> x = [2 1 -3 4]; z = min(x)

så ges z värdet -3 då det är det minsta elementet i vektorn. Vi kan även hitta den plats där det minska elementen finns genom att skriva

>> x = [2 1 -3 4]; [z,k] = min(x)

och k ges värdet 3 efter som x(3) = -3. Vi skall nu utnyttja detta för att hitta största och minsta värde för en funktion f(x) på ett intervall.

Uppgift 6.1 Vi vill studera funktionen $f(x) = 2e^{-4x} + x + \sin(x)$ på intervallet [0, 1]. Skriv de Matlab kommandon som krävs för att rita upp en graf över funktionen på det aktuella intervallet.

Använd funktionen min för att hitta den minsta funktionsvärdet samt den x-värde där minimum antas. Markera punkten där minimum antas med ett rött x. Kom ihåg hold on/off.

Uppgift 6.2 Vi vill studera polynomet $p(x) = 1 + x/2 + \cos(5x)2$ på intervallet $[1, \pi]$. Skriv de Matlab kommandon som krävs för att rita upp en graf över funktionen på det aktuella intervallet.

Använd funktionerna min och max för att hitta konstanter c_1 och c_2 sådana att $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ på det aktuella intervallet. \Box

TANA17 Matematiska beräkningar med Matlab

Facit till Datorlektion 1.

2 Elementära operationer och funktioner

Uppgift 2.1 Kommandona

>> x=1.5; y=2.7; z=x+y; disp(z) ger utskriften 4.2000.

Uppgift 2.2 Beräkningen

```
>> ii=sqrt(-1); % ger imaginära enheten
>> exp( ii*pi )
ans =
    -1.0000 + 0.0000i
visar att påståendet stämmer.
```

Uppgift 2.3 Skriv följande kommandon

>> x=0.6; f=x^2*(1-x)^2
>> x=2.3; g=exp(3*x)*sin(4*x)
så sätts f = 0.0576 och g = 221.1680.

Uppgift 2.4 Skriver vi

```
>> 4*atan(1)-pi
```

så fås svaret 0. Alltså kan $\verb"atan"$ funktionen beräknas korrekt.

3 Att skapa vektorer och matriser

Uppgift 3.1 Använd kommandon

>> x=[1 1.5 -3.0]'; y=[-2 0 2.3]'; >> z = 3.5*x-y; disp(z);

Uppgift 3.2 Kommandona blir

>> n=10; x=zeros(n,1); x(3)=-1.5; x(7)=2.2;

Uppgift 3.3 Skriv in

>> A=[1 2 3 ; 2 3 4 ; 4 5 7];
>> B=A; B(3,1)=3; B(3,2)=4;
>> (A*B)'
>> B'*A'

Bägge uttrycken ger samma svar vilket verifierar räkneregeln $(AB)^T = B^T A^T$.

Uppgift 3.4 Använd kommandona

>> A=ones(2,2); B=[A,2*A]

ger en 2×4 matris som först innehåller 4st ettor och sedan 4st tvåor.

Uppgift 3.5 Funktionen diag skapar en diagonal. Använd alltså

```
>> n=10; D=2*diag( ones(n,1) , 0 )+diag( ones(n-1,1), -1)+diag( ones(n-1,1),1);
>> D = [ D ; ones(1,n) ];  % D är nxn så vi kan lägga till en 1xn rad.
>> D = [ D , 2*ones(n+1,1) ]; % nu har D 11 rader så den extra
>>disp(D)  % kolumnen måste vara (n+1)x1.
```

Uppgift 3.6 Skriv in

>> A=ones(6,2); B=rand(2,3); C=A*B , [n,m]=size(C) Beräkningen ger en 6×3 matris C.

Uppgift 3.7 Beräkningarna ger antigen elementvis addition eller multiplikation.

Uppgift 3.8 Bilda kolumnvektorn med y=(10:0.5:12)';

Uppgift 3.9 v'*v beräknar skalärprodukten, dvs $v^T v = 373$. v.*v ger en vektor $(36\ 81\ 256)^T$. Beräkningen v*v fungerar inte.

Uppgift 3.10 Punkten innebär att motsvarande räkneoperation utförs elementvis.

Uppgift 3.11 Matlabkommandona

>> n=10; x=2*(0:n-1)/(n-1); f=cos(x).*x.^2; beräknar funktionsvärdena. Observera att elementvisa operationer krävs.

4 Indexering och Summor

```
Uppgift 4.1 Skriv
```

>> A=zeros(5,6);
>> A(2,1)=1;A(4,3)=1;A(5,1)=1;
>> A(:,6)=2*ones(5,1);

Uppgift 4.2 Skriv

>> x=(1:9)'; x(2:2:8)=0 >> x=(1:9)'; x(2:2:8)=-x(2:2:8)

Uppgift 4.3 Summan beräknas med kommandona

>> k=1:100; S=sum(1./(1+k.^2)) vilket get S = 1.0667. Observera elementvisa operationer.

Uppgift 4.4 Skriv

```
>> x=rand(13,1); % för att ha en vektor att utgå ifrån
>> n=length(x);
>> E=sqrt( sum( x.^2 ) )
```

5 Grafik i 2D och 3D

Uppgift 5.1 Använd exempelvis följande kommandon:

```
>> x=-1:0.5:1; y=x.^2;
>> plot(x,y,'g*');
                           % ger gröna stjärnor
>> hold on
>> plot(x,y,'k');
                           % ger en svart linje
>> hold off
                            % nästa plot raderer den nuvarande grafen
Uppgift 5.2 Använd:
>> x=(-1:0.01:1); y=x.^2;
>> plot(x,y); % blåa linjer är standard. Vill man kan man ange
                   % 'b-' som linjetyp.
Uppgift 5.3 Använd:
>> x=(-pi:0.01:pi);
>> plot(x , sin(x.^2) );
Uppgift 5.4 Lämplig text kan kanske vara:
>> xlabel('x-axeln');
>> ylabel('y-axeln');
>> title('en graf over sin(x^2)');
Uppgift 5.5 Använd:
>> x=(0:0.01:1);
>> f=cos(x);g=x.^2;
>> plot(x,f,'k-'); hold on, plot(x,g,'b--'), hold off
Uppgift 5.6 Följs instruktionerna så skall funktionsytan dyka upp.
```

6 Funktionsundersökning

Uppgift 6.1 Beräkna funktionsuttrycket och hitta minimum med

```
>> x=(0:0.01:1);
>> f=2*exp(-4*x)+x+sin(x);
>> [m,k]=min(f);
>> plot(x,f,'b-');hold on,plot(x(k),f(k),'rx'),hold off
Minimumet som markeras är alltså punkten (x(k), f(k)) = (0.35, 1.1861).
```

Uppgift 6.2 Beräkna polynomet och hitta konstanter med:

```
>> x=1:0.01:2;
>> p=1+x/2-3*x.^2;
>> c1=min(p);c2=max(p);
>> plot(x,p,'b-');
>> hold on  % lägg även till röda streckade linjer
>> plot([1 2],[c1 c1],'r--',[1 2],[c2 c2],'r--')
>> hold off
```