TEKNISKA HÖGSKOLAN I LINKÖPING
Matematiska institutionen
Beräkningsmatematik/Fredrik Berntsson

Tentamen TANA23 Matematiska Algoritmer och Modeller

Tid: 8-12, 30:e Maj, 2024

Plats:

Hjälpmedel:

1. Räknedosa i fickformat, med nollställt minne och utan instruktionsbok.

Examinator: Fredrik Berntsson

Maximalt antal poäng: 25 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

Jourhavandelärare Fredrik Berntsson (telefon 28 28 60)

Besök av jourhavande lärare sker ungefär 9.15 och 10.45.

Lycka till!

(5p) **1:** **a)** Låt $a = 31.881134$ vara det exakta värdet. Avrunda a till 4 *signifikanta siffror* för att få ett närmevärde $\bar{a}$. Ange även en gräns för *relativa felet* i $\bar{a}$.

b) Låt $x = 0.09034113$. Skriv x på *normaliserad form* och ange en gräns för *relativa felet* när x lagras på en dator som använder flyttalsystemet $(10, 3, -99, 99)$.

c) Låt $y = \exp(x + x^2)$, där $x = 0.35 \pm 0.02$. Beräkna ett närmevärde $\bar{y}$ med tillhörande felgräns.

(4p) **2:** Vi vill beräkna en approximation av integralen

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

givet följande tabell med korrekt avrundade funktionsvärden.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
$f(x)$	1.3499	1.0559	0.8093	0.6116	0.4575

a) Använd Trapetsmetoden och beräkna en approximation $T(h)$ av I, med steglängden $h = 0.5$.

b) Ytterligare några approximationer till I har beräknats med hjälp av Trapetsmetoden, och olika steglängder h. Följande resultat finns givna.

h	0.25	0.125
$T(h)$	0.8451	0.8423

Det är känt att trunkeringsfelet för Trapetsmetoden är $T(h) = I + R_T$, där $R_T \approx Ch^2$. Unyttja detta för att uppskatta trunkeringsfelet i approximationen $T(h = 0.125) = 0.8423$. *Redovisa dina beräkningar tydligt.*

(4p) **3:** Vi behöver beräkna funktionen

$$f(x) = \sqrt{4 + x} - 2,$$

för små x på en dator med maskinprecision $\mu = 1.11 \cdot 10^{-16}$. Genomför en beräkningsfelsanalys och hitta en gräns för det relativa felet i det beräknade värdet $f(x)$. Då analysen utförs skall du anta att alla beräkningar sker med ett relativt fel högst μ. Du skall även använda din felgräns för att avgöra om *kancellation* förekommer då uttrycket beräknas. Om kancellation förekommer skall du även föreslå ett alternativt uttryck som kan antas ge bättre noggranhet.

(4p) **4:** Ekvationen

$$x^2 = 2\exp(1-x)$$

har en rot x^* i närheten av 1.25.

a) Avgör om iterationsmetoden

$$x_{n+1} = (2x_n + \mathrm{e}^{1-x_n} - x^2/2)/2,$$

konvergerar mot roten x^* då startvärdet $x_0 = 1.25$ används. Motivera svaret med hjälp av teorin för fixpunktsiteration. Du skall inte utföra några iterationer.

b) Vi approximerar roten x^* med $\bar{x} = 1.248793$. Uppskatta felet i approximationen $\bar{x} \approx x^*$.

(4p) **5:** **a)** En funktion $s(x)$ ges av två tredjegrads polynom enligt

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = 0.8 + 0.2x - 0.4x^2, & 0 \le x < 1, \\ s_2(x) = a + b(x-1) - 0.4(x-1)^2 - 0.4(x-1)^3, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

där a och b är okända konstanter. Ange tydligt de krav som måste vara uppfyllda för att $s(x)$ skall vara en kubisk splinefunktion. Bestäm även värden på a och b som gör att $s(x)$ uppfyller kraven och alltså är en kubisk spline.

b) För att undersöka trunkeringsfelet för kubisk spline interpolation interpolerar vi en funktion $f(x)$ på intervallet $[0,1]$ med noder $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$. Vi använder olika antal noder n och får följande tabell

n	11	21	41	81
$R_T(h)$	$5.37 \cdot 10^{-5}$	$3.41 \cdot 10^{-6}$	$2.19 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-8}$

där h är steglängden. Utnyttja ovanstående tabell och antagandet att $R_T(h) \approx Ch^p$ för att bestämma metodens noggranhetsordning p.

(4p) **6:** Vi har en andra ordningens ordinär differentialekvation

$$y'' + 2y' = y^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Skriv om ekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Utnyttja även Euler's metod för att beräkna en approximation av lösningen $y(0.2)$, då steglängden $h = 0.1$ används.

Lösningsförslag till tentan för TANA23 Maj 2024.

(5p) **1:** För **a)** anvundar vi till $\bar{a} = 31.88$ som har 4 signifikanta siffror. Absoluta felet blir $|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$ eftersom $\bar{a}$ har 2 korrekta decimaler efter avrundningen. Därför blir *relativa felet* begränsat av $|\Delta a|/|a| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}/31.88 \leq 1.6 \cdot 10^{-4}$.

Uppgift **b)** ger ett flyttalssystem med maskinprecision $\mu = 0.5 \cdot 10^{-3}$. Detta är övre gränsen för det relativa felet då tal lagras på datorn. Denna gräns är ju oberoende av talet. Skriver vi ändå x på normaliserad form får vi $x = 9.034113 \cdot 10^{-2}$. Vi måste flytta decimalpunkten två steg för att få en siffra framför. I uppgift **c)** beräknar vi ett approximativt värde $\bar{y} = \exp(x + x^2) = \exp(0.35 + 0.35^2) = 1.60$ med $|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$. Felfortplantningsformeln ger

$$|\Delta y| \lesssim |\frac{\partial y}{\partial x}||\Delta x| = |\exp(x + x^2)(1 + 2x)||\Delta x| < 0.055.$$

Totala felet blir $|R_{TOT}| \leq 0.055 + 0.5 \cdot 10^{-2} < 0.06$. Alltså $y = 1.60 \pm 0.06$.

(4p) **2:** För **a)** tillämpar vi trapetsmetoden, med $h = 0.5$, och får

$$I \approx T(h = 0.5) = 0.5(\frac{f(0.0)}{2} + f(0.5) + \frac{f(1.0)}{2}) = 0.5(\frac{1.3499}{2} + 0.8093 + \frac{0.4575}{2}) = 0.8565.$$

I **b)** observerar vi att, eftersom $T(h) = I + Ch^2$, det gäller

$$T(2h) - T(h) \approx I + C(2h)^2 - I - Ch^2 = 3Ch^2.$$

Alltså, med $h = 0.125$, fås

$$R_T \approx Ch^2 \approx \frac{1}{3}(T(2h) - T(h)) = \frac{1}{3}(T(0.25) - T(0.125))\frac{1}{3}(0.8451 - 0.8423) = 9.34 \cdot 10^{-4}.$$

Detta är en uppskattning av trunkeringsfelet för approximationen $T(h = 0.125)$.

(4p) **3:** Beräkningsordningen är

$$f(x) = \sqrt{4 + x} - 2 = \sqrt{a} - 2 = b - 2 = c,$$

Felfortplantningsformeln ger sedan

$$|\Delta f| \lesssim |\frac{\partial f}{\partial a}||\Delta a| + |\frac{\partial f}{\partial b}||\Delta b| + |\frac{\partial f}{\partial c}||\Delta c| = |\frac{1}{2\sqrt{a}}||\Delta a| + |1||\Delta b| + |1||\Delta c| \lesssim$$

$$\mu(|\frac{\sqrt{a}}{2}| + |b| + |c|) \approx \mu(|\frac{2}{2}| + |2| + |x/4|) \approx 3\mu.$$

där vi använt konjugatuttryck och fått

$$f(x) = \sqrt{2 + x} - 2 = \frac{(\sqrt{2 + x} - 2)(\sqrt{2 + x} + 2)}{\sqrt{2 + x} + 2} \approx \frac{x}{4}$$

om x är liten. Det blir kancellation då det relativa felet blir $|\Delta f|/|f| \lesssim 12\mu/x$. Det relativa felet växer alltså då x blir mindre. Ett bättre uttryck för $f(x)$ vore att använda

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2+x}+2}.$$

Då kommer inte kancellation att uppstå.

(4p) **4:** För **a)** kontrollerar vi först att vi får konvergens mot rätt rot genom att sätta fixpunkten i iterationsformeln. Vi får

$$(x^*) = (2x^* + \mathrm{e}^{1-x^*} - (x^*)^2/2)/2.$$

Multiplicerar vi med 2, stryker termen $2x^*$, och sedan multiplicerar med 2 igen, fås

$$0 = 2\mathrm{e}^{1-x^*} - (x^*)^2,$$

vilket är precis den ekvation vi började med. Fixpunkten är alltså en rot. Fixpunktsiteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergerar om $|\varphi'(x^*)| \leq C < 1$, förutsatt att startgissningen x_0 ligger tillräckligt nära x^*. Vi beräknar

$$\varphi'(x) = (2 - \mathrm{e}^{1-x} - x)/2.$$

och $\varphi'(x^*) \approx \varphi'(1.25) \approx -0.0144$. Då $|\varphi'(x^*)| << 1$ drar vi slutsatsen att metoden konvergerar. Konvergensen bör vara rejält snabb.

För **b)** så noterar vi att vi löser $f(x) = 0$ där $f(x) = x^2 - 2\exp(1-x)$. Vi beräknar även $f'(x) = 2x + 2\exp(1-x)$. Felet uppskattas med metodoberoende feluppskattningen

$$|\bar{x} - x^*| \lesssim \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} < \frac{|1.24 \cdot 10^{-6}|}{|4.05|} < 3.1 \cdot 10^{-7}.$$

Alltså fås $x^* = 1.2487930 \pm 4 \cdot 10^{-7}$.

(4p) **5:** För **a)** så är en funktion en kubisk spline, med noder x_i, $i = 0, \ldots, n$, om

(a) $s(x)$ ges av ett tredjegradspolynom $s_i(x)$ på varje delintervall $x_i < x < x_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

(b) $s(x)$, $s'(x)$ och $s''(x)$, är kontinuerliga i skarvpunkterna x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Vi kan nu utnyttja villkoren ovan för att hitta a och b. Först beräknar vi $s_1(1) = 0.6$ och $s_1'(1) = -0.6$. För kontinuitet krävs då även att $s_2(1) = a = 0.6$ och att $s_2'(1) = b = -0.6$. Vi kan även kontrollera att $s_1''(1) = -0.8 = s_2''(1)$ och alltså är $s(x)$ en kubisk spline men det krävs inte i uppgiften.

I **b)** antar vi att, eftersom $R_T(h) \approx Ch^p$ och får

$$\frac{R_T(2h)}{R_T(h)} \approx 2^p.$$

Eftersom intervall längden är 1 blir steglängden $h = 1/(n-1)$ och antalet noder i tabellen svarar mot $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ och $h = 0.0125$. Exempelvis för $h = 0.025$ (eller $n = 41$) fås

$$\frac{R_T(0.05)}{R_T(0.025)} \approx \frac{3.41 \cdot 10^{-6}}{2.19 \cdot 10^{-7}} \approx 15.6 \approx 2^4.$$

Noggranhetsordningen verkar alltså vara $p = 4$ vilket stämmer med teorin.

(4p) **6:** Vi inför en ny obekant $v = y'$. Då blir $v' = y''$ och vi kan skriva ekvationen som $v' + 2v = y^2$. Skriver vi det som ett system fås

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ y^2 - 2v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Använder vi Euler's metod fås, med $h = 0.1$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0^2 - 2v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}.$$

På liknande sätt fås $(y_2, v_2)^T = (1.19, 0.841)^T$. Vi får alltså att $y(0.2) \approx y_2 = 1.19$.