

TEKNISKA HÖGSKOLAN I LINKÖPING
Matematiska institutionen
Beräkningsmatematik/Fredrik Berntsson

Tentamen TANA23 Matematiska Algoritmer och Modeller

Tid: 8-12, 3:e Juni, 2025

Plats:

Hjälpmedel:

1. Räknedosa i fickformat, med nollställt minne och utan instruktionsbok.

Examinator: Fredrik Berntsson

Maximalt antal poäng: 25 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

Jourhavandelärare Fredrik Berntsson (telefon 28 28 60)

Besök av jourhavande lärare sker ungefär 9.15 och 10.45.

Lycka till!

- (5p) **1:** **a)** Låt $x = 77.10938$ vara det exakta värdet. Avrunda x till 4 *signifikanta siffror* för att få ett närmevärde $\bar{x}$. Ange även en gräns för det *absoluta felet* och antalet korrekta decimaler i närmevärdet $\bar{x}$.
- b)** Låt $x = 11.37$ och $y = 0.2231$ vara två tal som bägge lagrats på en dator som använder talsystemet $(10, 3, -99, 99)$. Antag att vi vill beräkna $z = x + y$. Vilket är det tal $\bar{z}$, i talsystemet, som bäst approximerar det exakta resultatet z ? Ange även en övre gräns för det relativa felet i $\bar{z}$.
- c)** Låt $f(x) = (1 + cx)^2$, där $c = 0.71 \pm 0.03$. Beräkna ett närmevärde till $f(0.96)$ med tillhörande felgräns.

(4p) **2:** Låt tabellen,

x	0.3	0.5	0.6
$f(x)$	0.541	0.624	0.668

med korrekt avrundade funktionsvärden vara given. Använd linjär interpolation och beräkna en approximation till $f(0.43)$. Gör även en fullständig feluppskattning.

(4p) **3:** Vi behöver beräkna funktionen

$$f(x) = \sqrt{2 + \sin x} - 1,$$

för små x på en dator med maskinprecision $\mu = 1.11 \cdot 10^{-16}$. Genomför en beräkningsfelsanalys och hitta en gräns för det relativa felet i det beräknade värdet $f(x)$. Då analysen utförs skall du anta att alla beräkningar sker med ett relativt fel högst μ . Du skall även använda din felgräns för att avgöra om *cancellation* förekommer då uttrycket beräknas. Om *cancellation* förekommer skall du även föreslå ett alternativt uttryck som kan antas ge bättre noggrannhet.

(4p) 4: Ekvationen

$$x^2 = 2 \exp(1 - x)$$

har en rot x^* i närheten av 1.25.

- a) Hitta en bättre approximation av roten x^* genom att utföra 3 iterationer med Newton-Raphsons metod, och start gissningen $x_0 = 1.25$.
- b) Vi approximerar roten x^* med $\bar{x} = 1.248793$. Uppskatta felet i approximationen $\bar{x} \approx x^*$.
- c) Använder vi istället Newton-Raphson's metod och startgissningen $x_0 = 1.5$ får vi

k	x_k	$ x_k - x^* $
0	1.5	$2.51 \cdot 10^{-1}$
1	1.253875246	$5.08 \cdot 10^{-3}$
2	1.248794115	$1.42 \cdot 10^{-6}$
3	1.248792696	$1.09 \cdot 10^{-13}$

Utnyttja siffrorna i tabellen för att avgöra om $x^* \approx 1.248793$ är en enkel eller dubbel root. Motivera din slutsats noggrant.

(4p) 5: a) Splineinterpolation kan användas för att approximera en funktion $y = f(x)$. Vi har en tabell

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	3	1	0

och vill approximera $f(x)$ med en kubisk spline $s(x)$. Beskriv tydligt de villkor som måste vara uppfyllda för att $s(x)$ skall vara en kubisk spline som interpolerar tabellen ovan. Är den givna informationen tillräcklig för att $s(x)$ skall bli entydigt bestämd?

b) Låt

$$s(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 \leq x < 1, \\ x^3 - 3x^2 + 4x & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Är $s(x)$ en kubisk spline?

c) För att undersöka trunkeringsfelet för kubisk spline interpolation interpolerar vi en funktion $f(x)$ på intervallet $[0, 1]$ med noder $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$. Vi använder olika antal noder n och får följande tabell

n	11	21	41	81
$R_T(h)$	$5.37 \cdot 10^{-5}$	$3.41 \cdot 10^{-6}$	$2.19 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-8}$

där h är steglängden. Utnyttja ovanstående tabell och antagandet att $R_T(h) \approx Ch^p$ för att bestämma metodens noggrannhetsordning p .

(4p) 6: Vi har en andra ordningens ordinär differentialekvation

$$y''(t) + ty'(t) = 3(1+t)y(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Skriv om ekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Utnyttja även Euler's metod för att beräkna en approximation av lösningen $y(0.2)$, då steglängden $h = 0.1$ används.

Lösningsförslag till tentan för TANA23 Maj 2025.

- (5p) **1:** För **a)** använder vi till $\bar{a} = 77.11$ som har 4 signifikanta siffror. Absoluta felet blir $|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$ eftersom $\bar{a}$ har 2 korrekta decimaler efter avrundningen.

Uppgift **b)** det exakta resultatet $z = x + y = 11.37 + 0.2231 = 11.5931$ eller $z = 1.15931 \cdot 10^1$. Den bästa approximationen inom talsystemet blir då $\bar{z} = 1.159 \cdot 10^1$. Flyttalssystemet har maskinprecision $\mu = 0.5 \cdot 10^{-3}$. Detta är övre gränsen för det relativa felet då tal lagras på datorn. Denna gräns är ju oberoende av talet. I uppgift **c)** beräknar vi ett approximativt värde $\bar{y} = \bar{f}(0.96) = (1 + 0.71 \cdot 0.96)^2 = 2.83$ med $|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$. Felfortplantningsformeln ger

$$|\Delta y| \lesssim \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| |\Delta c| = |2(1 + cx)x| |\Delta c| < 0.097.$$

Totala felet blir $|R_{TOT}| \leq 0.097 + 0.5 \cdot 10^{-2} < 0.11$. Alltså $y = 2.83 \pm 0.11$.

- (4p) **2:** Newtons interpolations formel ger ansatsen $p(x) = p_1(x) + R_T(x) = c_0 + c_1(x - 0.3) + c_2(x - 0.3)(x - 0.5)$, där sista termen används för trunkeringsfelet. Vi använder nu tabellvärden och får $p(10.3) = c_0 = 0.541$ och $p(0.5) = c_0 + c_1(0.2) = 0.624$, vilket ger $c_1 = 0.4150$. Sista ekvationen är $p(0.6) = c_0 + c_1(0.3) + c_2(0.3)(0.1) = 0.668$ som ger $c_2 = 0.833$. Alltså

$$p_1(x) = 0.541 + 0.415(x - 0.3) \text{ och } R_T(x) = 0.833(x - 0.3)(x - 0.5).$$

Vi får $f(0.43) \approx p_1(0.43) = 0.5949 \approx 0.595$ med $|R_B| < 0.5 \cdot 10^{-3}$ och $R_T \leq |0.833(0.43 - 0.3)(0.43 - 0.5)| < 0.76 \cdot 10^{-2}$. Felet i funktionsvärden från tabellen ger ett fel $R_{XF} < 0.5 \cdot 10^{-3}$ i svaret. Alltså $f(1.46) = 0.595 \pm 0.9 \cdot 10^{-2}$.

- (4p) **3:** Beräkningsordningen är

$$f(x) = \sqrt{2 + \sin(x)} - 1 = \sqrt{2 + a} - 1 = \sqrt{b} - 1 = c - 1 = d,$$

Felfortplantningsformeln ger sedan

$$\begin{aligned} |\Delta f| &\lesssim \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| |\Delta a| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| |\Delta b| + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| |\Delta c| + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| |\Delta d| = \left| \frac{1}{2\sqrt{2+a}} \right| |\Delta a| + \left| \frac{1}{2\sqrt{b}} \right| |\Delta b| + |1| |\Delta c| \\ &+ |1| |\Delta d| \lesssim \mu \left(\left| \frac{a}{2\sqrt{2+a}} \right| + \left| \frac{\sqrt{b}}{2} \right| + |c| + |d| \right) \approx \mu \left(\left| \frac{x}{2\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + |\sqrt{2}-1| + |\sqrt{2}-1| \right) \approx 1.54\mu. \end{aligned}$$

där vi använt $a \approx x$ och $b \approx 2$, då x är litet. Det blir ingen cancellation då $|f(x)| \approx |\sqrt{2} - 1| \approx 0.41$ och relativa felet, $|\Delta f|/|f| \lesssim 3.76\mu$ hålls begränsat även för mycket små x .

- (4p) 4: För **a)** inför vi först en funktion $f(x) = x^2 - 2\exp(1-x)$ och beräknar dess derivata $f'(x) = 2x + 2\exp(1-x)$. Newton-Raphson's metod är

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Använder vi start gissningen $x_0 = 1.25$ fås $x_1 = 1.248792776033491$, $x_2 = 1.248792696686403$ och $x_3 = 1.248792696686402$. Riktigt snabb konvergens och det är inte säkert att en mini-räknare ser skillnad på x_2 och x_3 .

För **b)** låter vi $\bar{x} = 1.248793$ och uppskattar felet som

$$|\bar{x} - x^*| \lesssim \frac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} < \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{4.05} < 0.31 \cdot 10^{-6}.$$

vilket är precis den ekvation vi började med. Fixpunkten är alltså en rot. Fixpunktsiteration $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergerar om $|\varphi'(x^*)| \leq C < 1$, förutsatt att startgissningen x_0 ligger tillräckligt nära x^* . Vi beräknar

$$\varphi'(x) = (2 - e^{1-x} - x)/2.$$

och $\varphi'(x^*) \approx \varphi'(1.25) \approx -0.0144$. Då $|\varphi'(x^*)| \ll 1$ drar vi slutsatsen att metoden konvergerar. Konvergensen bör vara rejält snabb.

För **c)** så noterar vi att $|x_1 - x^*|^2 = (5.08 \cdot 10^{-3})^2 \approx 2.6 \cdot 10^{-5}$, och $|x_2 - x^*|^2 = (1.42 \cdot 10^{-6})^2 \approx 2.0 \cdot 10^{-12}$. Det stämmer hyfsat med att $|x_{k+1} - x^*| \approx C|x_k - x^*|^2$ om $C \approx 0.055$. Alltså kan vi se att konvergensen verkar kvadratisk. Det är känt att Newton-Raphsons metod har kvadratisk konvergens för enkelrötter och linjär konvergens för dubbel rötter. Alltså är detta en enkelrot.

- (4p) 5: För **a)** De villkor som $s(x)$ skall uppfylla för att vara en kubisk spline är (i) på varje delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ skall $s(x)$ vara given som ett tredjegradspolynom, och (ii) $s(x)$, $s'(x)$ och $s''(x)$ skall vara kontinuerliga på hela intervallet $[x_1, x_n]$. Dessutom skall (iii) interpolationsvillkoren $s(x_i) = f(x_i)$ vara uppfyllda. Den givna informationen är inte tillräcklig för att $s(x)$ skall bli entydigt bestämd. Det krävs även två ändpunktsvillkor.

För **b)** så är $s(x)$ en kubisk spline då $s(x)$, $s'(x)$ och $s''(x)$ är kontinuerliga vid $x = 1$. Dessutom ges $s(x)$ av tredjegradspolynom.

I **c)** antar vi att, eftersom $R_T(h) \approx Ch^p$ och får

$$\frac{R_T(2h)}{R_T(h)} \approx 2^p.$$

Eftersom intervall längden är 1 blir steglängden $h = 1/(n-1)$ och antalet noder i tabellen svarar mot $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ och $h = 0.0125$. Exempelvis för $h = 0.025$ (eller $n = 41$) fås

$$\frac{R_T(0.05)}{R_T(0.025)} \approx \frac{3.41 \cdot 10^{-6}}{2.19 \cdot 10^{-7}} \approx 15.6 \approx 2^4.$$

Noggrannhetsordningen verkar alltså vara $p = 4$ vilket stämmer med teorin.

(4p) **6:** Vi inför en ny obekant $v = y'$. Då blir $v' = y''$ och vi kan skriva ekvationen som $v' + tv = 3(1+t)y$. Skriver vi det som ett system fås

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ 3(1+t)y - tv \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Använder vi Euler's metod fås, med $h = 0.1$, $t_0 = 0$ och $t_1 = 0.1$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_0 \\ 3(1+t_0)y_0 - t_0v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.0 \end{pmatrix}.$$

På liknande sätt fås $(y_2, v_2)^T = (0.2, 1.023)^T$. Vi får alltså att $y(0.2) \approx y_2 = 0.2$.