Symmetrisk rang-ett-uppdatering

Ansätt $D_{k+1} = D_k + a_k v^k v^{kT}$, där $a_k \in R$ och $v^k \in R^n$ samt är noll-skilda.

Om D_k är symmetrisk så fås $D_{k+1}^T = D_k^T + (a_k v^k v^{kT})^T =$
$= D_k + a_k v^k v^{kT} = D_{k+1}$, dvs att även D_{k+1} är symmetrisk. Symmetri bevaras alltså.
Matrisen $a_k v^k v^{kT} \in R^{n \times n}$ är uppbyggd av endast en vektor och har därför rang ett.

Hur välja a_k och v^k så att $D_{k+1} q^k = p^k$ uppfylls?
Lös map a_k och v^k!

$$D_{k+1} q^k = p^k \Rightarrow p^k = D_k q^k + a_k v^k v^{kT} q^k \Rightarrow p^k - D_k q^k = a_k v^k v^{kT} q^k \quad (i)$$

$$\Rightarrow q^{kT}(p^k - D_k q^k) = a_k \underbrace{q^{kT} v^k}_{\text{skalär}} \underbrace{v^{kT} q^k}_{\text{dito}} \Rightarrow q^{kT}(p^k - D_k q^k) = a_k (v^{kT} q^k)^2 \quad (ii)$$

(i) ger även att $(p^k - D_k q^k)(p^k - D_k q^k)^T =$

$$= a_k^2 v^k \underbrace{v^{kT} q^k}_{\text{skalär}} \underbrace{q^{kT} v^k}_{\text{dito}} v^{kT} = a_k^2 (v^{kT} q^k)^2 v^k v^{kT}$$

$$\Rightarrow D_{k+1} = D_k + a_k v^k v^{kT} \underset{\text{Lös ut } a_k v^k v^{kT} \text{ ovan!}}{=} D_k + \frac{(p^k - D_k q^k)(p^k - D_k q^k)^T}{a_k (v^{kT} q^k)^2}$$

$$\underset{(ii)}{\Rightarrow} D_{k+1} = D_k + \frac{(p^k - D_k q^k)(p^k - D_k q^k)^T}{q^{kT}(p^k - D_k q^k)} \quad (iii)$$

vilket är den sökta uppdateringen!

Antag att $f(x)$ är kvadratisk med $\nabla^2 f(x) = H$. Ger rang-ett-uppdateringen då H^{-1} efter n uppdateringar?

<u>Sats</u>: Låt $p^0, \dots, p^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ vara givna och låt $q^k = Hp^k$, $k = 0, \dots, n-1$. Låt D_0 vara symmetrisk och definiera D_{k+1}, $k = 0, \dots, n-1$, enligt (iii). Då gäller $p^i = D_{k+1} q^i$ för $i = 0, \dots, k$ och $k = 0, \dots, n-1$.

<u>Bevis</u>: Använd induktion map k.
Enligt den tidigare härledningen gäller $p^k = D_{k+1} q^k$ för $k = 0, \dots, n-1$.
i) För $k = 0$ är endast $i = 0$ möjligt. Enligt ovan gäller $p^0 = D_1 q^0$, varför påståendet är sant för $k = 0$.
ii) Antag att påståendet är sant för D_k och $i = 0, \dots, k-1$. Visa att även är sant för D_{k+1} och $i = 0, \dots, k$.
<u>Fallet</u> <u>$i = k$</u>: $p^k = D_{k+1} q^k$ gäller enligt ovan.
<u>Fallet</u> <u>$i < k$</u>: $D_{k+1} q^i = D_k q^i + \dfrac{(p^k - D_k q^k)(p^k - D_k q^k)^T q^i}{q^{kT}(p^k - D_k q^k)} =$

$$= \frac{(p^k - D_k q^k)(p^{kT} q^i - q^{kT} D_k q^i)}{q^{kT}(p^k - D_k q^k)}$$

$i < k \Rightarrow D_k q^i = p^i$ gäller (induktionshypotesen)

$$\Rightarrow D_{k+1} q^i = p^i + \frac{(p^k - D_k q^k)(p^{kT} q^i - q^{kT} p^i)}{q^{kT}(p^k - D_k q^k)}$$

Men $q^{kT} p^i \underset{q^k = Hp^k}{=} p^{kT} H p^i \underset{q^i = Hp^i}{=} p^{kT} q^i \Rightarrow D_{k+1} q^i = p^i$

iii) Påståendet är alltså sant för $i = 0, \dots, k$ och $k = 0, \dots, n-1$.

V.S.V.

Följdsats: Om H är icke-singulär och $p^0, \dots, p^{n-1}$ är linjärt oberoende så gäller att $D_n = H^{-1}$.

Bevis: Med $k = n-1$ fås att $p^i = D_n q^i$ gäller för $i = 0, \dots, n-1 \Rightarrow [p^0, \dots, p^{n-1}] = D_n [q^0, \dots, q^{n-1}] =$
$= D_n [Hp^0, \dots, Hp^{n-1}] = D_n H [p^0, \dots, p^{n-1}] \Rightarrow$
$\Rightarrow D_n H = I \Rightarrow D_n = H^{-1}$, ty $q^k = Hp^k$, $k = 0, \dots, n-1$, och $[p^0, \dots, p^{n-1}]$ är icke-singulär.

V.S.V.

Kommentarer:
Rang-ett-uppdateringen förutsätter inget om hur riktningarna $p^0, \dots, p^{n-1}$ skapas. Speciellt behöver de inte ges av $p^k = x^{k+1} - x^k$, $k = 0, \dots, n-1$, där x^k, $k = 0, \dots, n-1$, är iterationspunkter som skapats genom exakta linjesökningar.

Rang-ett-uppdateringen är det enklaste exemplet på hur information som samlas under en iterativ lösningsmetod kan användas för att successivt bygga upp en approximation av inversen till Hessianen.
Positiv definithet bevaras *endast* *om* $q^{k^T}(p^k - D_k q^k) > 0$ gäller, vilket *inte* säkert gäller.
Även om $q^{k^T}(p^k - D_k q^k) > 0$ gäller så kan $q^{k^T}(p^k - D_k q^k) \approx 0$ inträffa, vilket kan ge numeriska problem i beräkningarna.