

Uppgift 1: Algoritmiska avbildningar

1. Betrakta avbildningen $A : R_+ \rightarrow R_+$ med $A(x) = \{\sqrt{x}\}$.

- a) Visa att $\alpha(x) = |x - 1|$ är en meritfunktion för A .
- b) Visa att algoritmen som definieras av avbildningen A ger konvergens mot $x^* = 1$, för godtyckligt val av startpunkt $x > 0$.

2. Låt $f : R \rightarrow R$ vara kontinuerligt differentierbar. Låt $A : R \rightarrow R$ med

$$A(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

då $f'(x) \neq 0$, vilket svarar mot Newton–Raphsons metod för ekvationen $f(x) = 0$.

- a) Låt $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Tillämpa den algoritmiska avbildningen från startpunkten $x^0 = -5$. Lösas ekvationen $f(x) = 0$ i limes?
 - b) Låt $f(x) = x^2 - |x^3|$. Tillämpa den algoritmiska avbildningen från startpunkten $x^0 = 3/5$. Lösas $f(x) = 0$ i limes?
 - c) Förklara skillnaden mellan exemplen ovan utifrån konvergensteoremet för algoritmiska avbildningar.
3. Låt $f : R^n \rightarrow R$ vara kontinuerligt differentierbar och betrakta problemet att finna ett minimum av $f(x)$ över $x \in R^n$. En enkel iterativ algoritm för detta problem använder sig av brantaste koordinatriktningar och (exakta) linjesökningar i dessa riktningar. Med

$$k(x) \in \arg \max_{j=1, \dots, n} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|$$

ges sökriktningen i denna metod av avbildningen $D : R^n \rightarrow R^n$ med

$$d_j = \begin{cases} 1 & \text{om } j = k(x) \text{ och } \frac{\partial f(x)}{\partial x_{k(x)}} < 0 \\ -1 & \text{om } j = k(x) \text{ och } \frac{\partial f(x)}{\partial x_{k(x)}} > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n.$$

- a) Avbildningen D är flervärd i vissa punkter; vilka?
 - b) Vilken lösningsmängd har algoritmen?
 - c) Tillämpa konvergensteoremet för slutna avbildningar för att visa att algoritmen är konvergent, genom att visa att den sammansatta algoritmiska avbildningen, bestående av riktningsbestämning och linjesökning, är sluten i alla icke-lösningsspunkter och att det finns en meritfunktion för avbildningen. (Det är tillåtet att utnyttja att exakt linjesökning svarar mot en sluten avbildning.)
4. Givet problemet att minimera $f(x)$ över $x \geq 0$, där $f : R^n \rightarrow R$ är kontinuerligt differentierbar. Betrakta följande två principer för att beräkna en sökriktning:

$$d_j^1 = \begin{cases} -\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} & \text{om } x_j > 0 \text{ eller om } x_j = 0 \text{ och } \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \leq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och

$$d_j^2 = \begin{cases} -\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} & \text{om } \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \leq 0 \\ -x_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} & \text{om } \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} > 0. \end{cases}$$

- a) Teckna Karush–Kuhn–Tucker-villkoren för problemet. Visa att om dessa är uppfyllda så blir $d^1 = d^2 = 0$.
 - b) Givet en punkt där Karush–Kuhn–Tucker-villkoren inte är uppfyllda. Visa att då är d^1 och d^2 nollskilda och avtaganderiktningar.
 - c) Visa att den första principen för att beräkna en sökriktning definierar en avbildning, $D_1 : R_+^n \rightarrow R^n$, som *inte* är sluten på mängden av punkter $x \geq 0$ som inte uppfyller Karush–Kuhn–Tucker-villkoren, det vill säga att det finns sådana punkter där avbildningen inte är sluten.
 - d) Visa att den andra principen för att beräkna en sökriktning definierar en avbildning, $D_2 : R_+^n \rightarrow R^n$, som *är* sluten på mängden av punkter $x \geq 0$ som inte uppfyller Karush–Kuhn–Tucker-villkoren, det vill säga att avbildningen är sluten för alla sådana punkter.
 - e) Illustrera grafiskt resultaten i deluppgifterna c) och d) genom att betrakta problemet att minimera $f(x) = x_1 + x_2$ då $x_1, x_2 \geq 0$ och punktsekvensen $x^k = (1/k, 1)^T$, $k = 1, 2, 3, \dots$, som har gränspunkten $\bar{x} = (0, 1)^T$.
5. Givet problemet att minimera $f(x)$ över X , där $X \subseteq R^n$ är kompakt och konvex samt $f : R^n \rightarrow R$ är kontinuerligt differentierbar. Givet ett $x^0 \in X$ ger *gradientprojektionsmetoden* med fix steglängd, $t > 0$, på detta problem iterationssekvensen

$$x^{k+1} = [x^k - t \nabla f(x^k)]^+,$$

där $[\cdot]^+$ betecknar euklidisk projektion på X . Avgör om motsvarande algoritmiska avbildning är sluten eller ej.