

Uppgift 3: Linjesökningar

1. a) Låt $f : R^n \rightarrow R$ vara kontinuerligt differentierbar. Låt $\bar{x} \in R^n$ och $\bar{d} \in R^n$ vara givna, och betrakta problemet att minimera $f(\bar{x} + t\bar{d})$ över $t \in R$. Visa att om ett exakt minimum fås för $t = \bar{t}$ så gäller att $\nabla f(\bar{x} + \bar{t}\bar{d}) \perp \bar{d}$.
b) Låt $f : R^n \rightarrow R$ med $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$, där $Q \in R^{n \times n}$ är symmetrisk och positivt definit och $b \in R^n$. Låt $\bar{x} \in R^n$ vara given och låt $\bar{d} \in R^n$ vara en avtaganderiktning för f i $\bar{x}$. Betrakta problemet att minimera $f(\bar{x} + t\bar{d})$ över $t \in R$. Finn ett uttryck för det optimala steget och motivera varför det är positivt.
2. Låt $f : R^n \rightarrow R$. Låt $\bar{x} \in R^n$ vara given och låt $\bar{d} \in R^n$ vara en avtaganderiktning för f i $\bar{x}$. Betrakta linjesökningsproblemet att minimera $\varphi(t) = f(\bar{x} + t\bar{d})$ med avseende på $t > 0$.
a) Antag att $\nabla^2 f(x)$ är icke-singulär för varje $x \in R^n$ och att linjesökningsproblemet angrips med Newtons metod från det initiala steget $t_0 = 0$. Teckna uttrycket för metodens iteration, det vill säga uttrycket för t_{k+1} givet t_k .
Det finns generellt inga garantier för att sekvensen $\{t_k\}$ av steg kommer att bli positiv eller att sekvensen kommer att konvergera. Ge ett krav på funktionen f som är tillräckligt för att säkerställa att $t_1 > 0$ gäller.
b) Antag att t_{k+1} istället får utgöra optimallösningen till problemet

$$\min_t \quad \varphi(t_k) + \varphi'(t_k)(t - t_k) + \frac{1}{2}\varphi''(t_k)(t - t_k)^2 + \frac{\gamma}{2}(t - t_k)^2,$$

där $\gamma > 0$ och den sista termen kan tolkas som ett straff på att värdet på t avviker mycket från det aktuella iteratet t_k . Teckna ett uttryck för t_{k+1} givet t_k .

Antag att $t_0 = 0$. Visa att om γ är tillräckligt stor så fås $t_1 > 0$. Hur stort måste γ väljas för att detta ska gälla?

3. Implementera i MATLAB en Armijo-linjesökning som bygger på upprepade halveringar eller dubbleringar av ett initialt steg tills den aktuella steget är det maximala som uppfyller Armijo-kravet (givet att steget endast kan ökas med en faktor två). Beräkna det initiala steget med *en* iteration av Newtons metod (från steget $t = 0$).

Prova linjesökningen i brantaste lutningsmetoden på problemet att minimera

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2.$$

Starta i $x^0 = (0, 3)$. Redovisa en plott av målfunktionsvärdet mot antalet iterationer och en plott av iterationspunkterna. Redovisa även MATLAB-koden.

[Minimum antas självklart i punkten $x^* = (2, 1)$ med $f(2, 1) = 0$. Utnyttja detta för att verifiera resultatet.]