

Uppgift 6: Sekventiell linjärprogrammering, sekventiell kvadratisk programmering och Gauss–Newton

1. Visa att punkten $\bar{x} \in R^n$ uppfyller Karush–Kuhn–Tucker villkoren för problemet

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad | \quad u_i \geq 0, \end{aligned}$$

om och endast om den även är en Karush–Kuhn–Tucker punkt för det linjära problemet

$$\begin{aligned} \min & f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \\ \text{då} & g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad | \quad u_i \geq 0, \\ & -\Delta \leq x_j - \bar{x}_j \leq \Delta, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

där $\Delta > 0$.

2. Betrakta samma ursprungliga problem och samma linjärisering av målfunktion och bivillkor som i uppgiften ovan, men antag att steglängdsbegränsningen i max-norm ersätts med en steglängdsbegränsning i kvadratisk euklidiskt avstånd (2-norm), det vill säga med villkoret $\|x - \bar{x}\|_2^2 \leq \Delta$. Antag vidare att detta villkor Lagrange-relaxeras med multiplikator $\nu > 0$. Det kvadratiske optimeringsproblem som då fås sammanfaller med det kvadratiske primala problem som löses i sekventiell kvadratisk programmering, givet att Hessianen $\nabla_{xx}^2 L$ approximeras på ett speciellt sätt; hur?
3. Lös bifogade problem med hjälp av endera vanlig sekventiell linjärprogrammering eller regulariserad sekventiell linjärprogrammering, det vill säga sekventiell kvadratisk programmering med Hessianen av Lagrange-funktionen ersatt med νI , där $\nu > 0$ och tillräckligt stor. Implementera i MATLAB. För att lösa de approximerande problemen utnyttjas lämpligen lösare som finns i MATLAB.
4. Observationerna $t = (1, 2, 4, 5, 8)$ och $y = (3, 4, 6, 11, 20)$ kan antas uppfylla modell-sambandet $y_i \approx x_1 e^{x_2 t_i}$, $i = 1, \dots, 5$, för lämpliga värden på parametrarna x_1 och x_2 . Anpassa modellen till observationerna genom att lösa minsta-kvadrat-problemet

$$\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^5 \left(x_1 e^{x_2 t_i} - y_i \right)^2$$

med Gauss–Newtons metod. Starta med $x_1 = 2,5$ och $x_2 = 0,25$, och avbryt då $\|\nabla f(x_1^k, x_2^k)\| < 10^{-6}$. Plotta observationerna och den anpassade modellen.

5. Låt $g : R^n \mapsto R^m$ med $m < n$ och antag att ekvationssystemet $g(x) = 0$ har en lösning. Betrakta minsta-kvadrat-problemet

$$\min_{x \in R^n} f(x) = \frac{1}{2} \|g(x)\|^2$$

Låt x^* vara en optimallösning.

- a) Visa att Hessianen för f i x^* , $\nabla^2 f(x^*)$, är singular.
- b) Betrakta fallet då g är linjär och har formen $g = b - Ax$, där $A \in R^{m \times n}$ (med $m < n$). Visa att detta problem har oändligt många optimallösningar. Visa vidare att om A har linjärt oberoende rader så ges en optimallösning av $x = A^T(AA^T)^{-1}b$.