

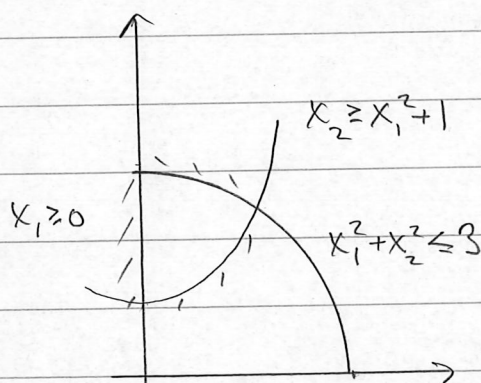
Icke-linjär optimering

Optimeringsproblem som innehåller icke-linjära funktioner.

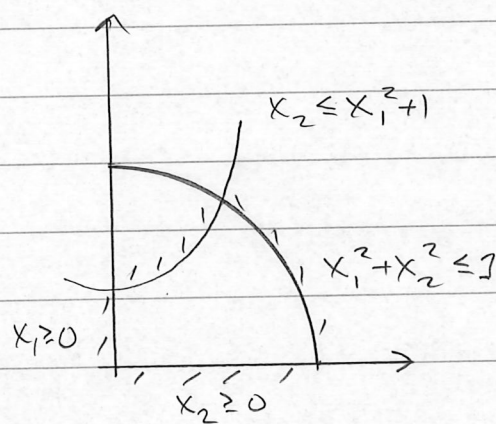
Först: mer konvexitet. Varför?

- Linjära optimeringsproblem är alltid konvexa.
- Heltalsoptimeringsproblem är alltid icke-konvexa.
- Icke-linjära optimeringsproblem kan vara konvexa eller icke-konvexa.

Exempel Konvext och icke-konvext område.



konvext



icke-konvext %

Hur avgöra konvexitet?

Först: lite repetition!

Konvexitet: sammanfattning

Mängden $X \subseteq R^n$ är konvex då

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$$

gäller för alla $x^1, x^2 \in X$ och alla $\lambda \in [0, 1]$.

Funktionen $f : X \rightarrow R$ (X konvex) är konvex på X då

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

gäller för alla $x^1, x^2 \in X$ och alla $\lambda \in [0, 1]$.

Problemet $\min_{x \in X} f(x)$ är konvext då X är konvex och f är konvex på X . [Maximeringsproblem: f konkav på X .]

Ett *lokalt* optimum till ett konvext problem är också ett *globalt* optimum.

Om

X är konvex,

f är konvex på X ,

$g_i, i = 1, \dots, m$, är konvexa på X ,

så är problemet

$$\min f(x)$$

$$\text{då } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in X$$

konvext.

Sats: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex på X
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex och icke-avtagande } $\Rightarrow$

$h = g \circ f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ är konvex på $\mathbb{X}$ /

- g icke-aftagande: $y' \leq y^2 \Rightarrow g(y') \leq g(y^2)$
tex: $g(y) = e^y$
- $h = g \circ f$ är en sammansatt funktion
tex: $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ och $g(y) = e^y \Rightarrow h(x) = g(f(x)) = e^{x_1^2 + x_2^2}$

Bevis: Låt $x^1, x^2 \in \mathbb{X}$ och $\lambda \in [0, 1]$.

$$f \text{ konvex} \Rightarrow \underbrace{f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)}_{y^1} \leq \underbrace{\lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)}_{y^2}$$

$$g \text{ i\ss ke-avt\ss gende} \Rightarrow g(\underbrace{f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)}_{y^1}) \leq g(\underbrace{\lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)}_{y^2})$$

$$\begin{aligned} \text{Aussage: } h(\lambda x' + (1-\lambda)x^2) &= g(f(\lambda x' + (1-\lambda)x^2)) \leq \\ &\leq g(\lambda f(x') + (1-\lambda)f(x^2)) \stackrel{\text{g konvex}}{\leq} \lambda g(f(x')) + (1-\lambda)g(f(x^2)) = \end{aligned}$$

$$= \lambda h(x^1) + (1-\lambda)h(x^2) \Rightarrow h \text{ konvex.} \quad \%$$

Exempel $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ konvex på $\mathbb{R}^2$ } $\Rightarrow$
 $g(y) = e^y$ konvex och icke-avtagande }

$$\Rightarrow h(x) = e^{x_1^2 + x_2^2} \text{ ist konvex auf } \mathbb{R}^2 \quad ./. \quad$$

Sats: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \in C^2$ på X } $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ är konvex på X om dess Hessian $\nabla^2 f(x)$ är positivt semidefinit på X .

- $\nabla^2 f(x)$ positivt semidefinit på $X \Leftrightarrow \nabla^2 f(x)$ positivt semidefinit för alla $x \in X$
- $\nabla^2 f(x)$ positivt semidefinit $\Leftrightarrow$ alla egenvärden till $\nabla^2 f(x)$ är icke-negativa $\Leftrightarrow s^T \nabla^2 f(x) s \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}^n$

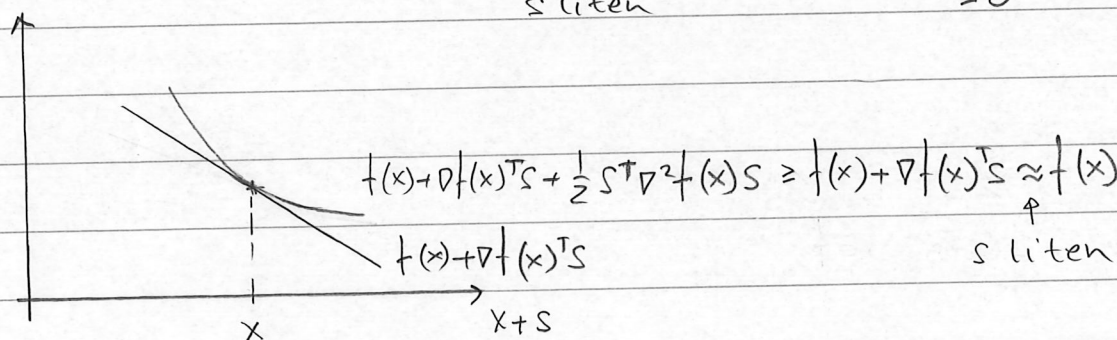
Hessian:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$f \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} \Rightarrow \nabla^2 f(x)$ symmetrisk

Troleggsörande:

Taylor-utveckling $\Rightarrow f(x+s) \approx \underbrace{f(x)}_{s \text{ liten}} + \nabla f(x)^T s + \underbrace{\frac{1}{2} s^T \nabla^2 f(x) s}_{\geq 0}$



"Lokal" konvexitet överallt $\Rightarrow$ konvex !

✓

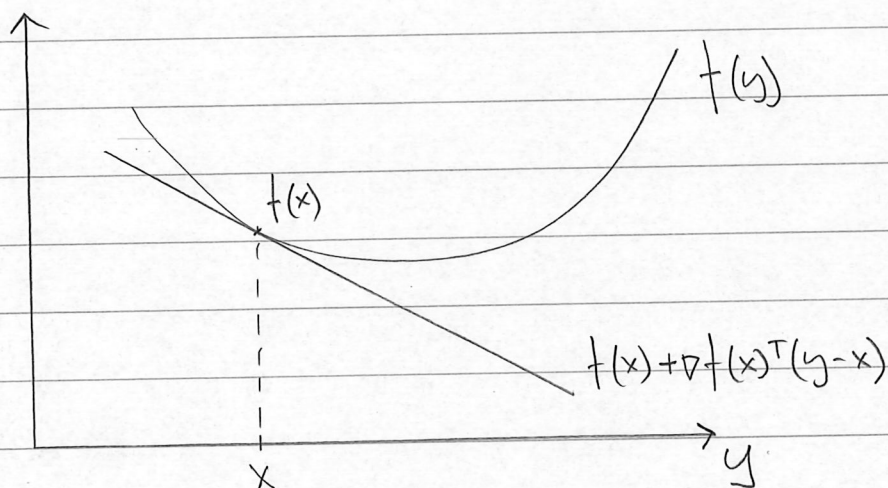
Specialfall: om $X \in \mathbb{R}$ så är f konvex på X om $f''(x) \geq 0$ gäller för alla $x \in X$.

Följsats: f är konkav på X om $\nabla^2 f(x)$ är negativt semidefinit på X .

Följer av att f är konkav om $-f$ är konvex och att om $\nabla^2(-f(x))$ har ett eget värde $\lambda \geq 0$ så är $-\lambda \leq 0$ ett eget värde till $\nabla^2 f(x)$.

Sats: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex }
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ } $\Rightarrow$
 $f \in C^1$ på X }

$\Rightarrow f$ konvex på X om $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x)$ gäller för alla $x, y \in X$.



Tolkning: f konvex på X om varje tangentplan underskettar f på X .

Exempel Är problemet

$$\min f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + e^{x_1} - 5(\ln(x_2+1))$$

$$\text{där } \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

konvext?

malfunktion: $f(x) = \underbrace{4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2}_{=f_1(x)} + \underbrace{e^{x_1}}_{=f_2(x)} + \underbrace{5(-\ln(x_2+1))}_{=f_3(x)}$

$$\nabla^2 f_1(x) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f_1(x) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 10 \geq 0 \text{ och } \lambda_2 = 0 \geq 0 \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f_1(x) \text{ positivt semidefinit på } \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow f_1 \text{ konvex på } \mathbb{R}^2$$

$$f_2''(x_1) = e^{x_1} \geq 0 \text{ för alla } x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f_2 \text{ konvex på } \mathbb{R}$$

$$f_3''(x_2) = \frac{1}{(x_2+1)^2} \geq 0 \text{ för } x_2 \geq 0 \Rightarrow f_3 \text{ konvex för } x_2 \geq 0$$

Alltså är $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + 5f_3(x_2)$ konvex på det tillåtna området!

bivillkor: $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$ konvex på $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ villkoret $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$ definierar en konvex mängd

Villkoret $x_1 + x_2 \geq 1$ är linjärt $\Rightarrow$
definierar en konvex mängd

Villkoren $x_1, x_2 \geq 0$ är konvexa $\Rightarrow$
definierar konvexa mängder

Alltså är tillåtna mängden konvex!

- minimering
 - konvex målfunktion
 - konvext tillåtet område
- } $\Rightarrow$ konvext problem!

✓