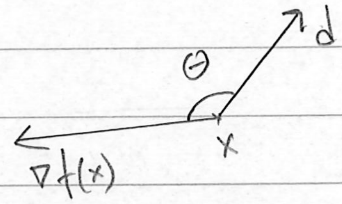
Brantaste lutningsmetoden

Vilken riktning är lokalt bäst?

Finn $\min\limits_{\|d\|=1} \nabla f(x)^T d$!

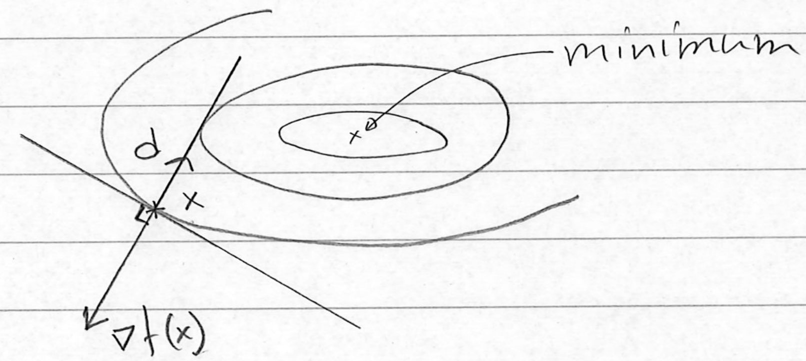


$$\nabla f(x)^T d = \underbrace{\|\nabla f(x)\|}_{=\text{konstant}} \cdot \underbrace{\|d\|}_{=1} \cdot \cos \Theta$$

Alltså fås $\min\limits_{\|d\|=1} \nabla f(x)^T d$ för $\Theta = \pi$, dvs

f avtar snabbast från x längs $d \,//\, -\nabla f(x)$.

Kallas brantaste lutningsriktningen.



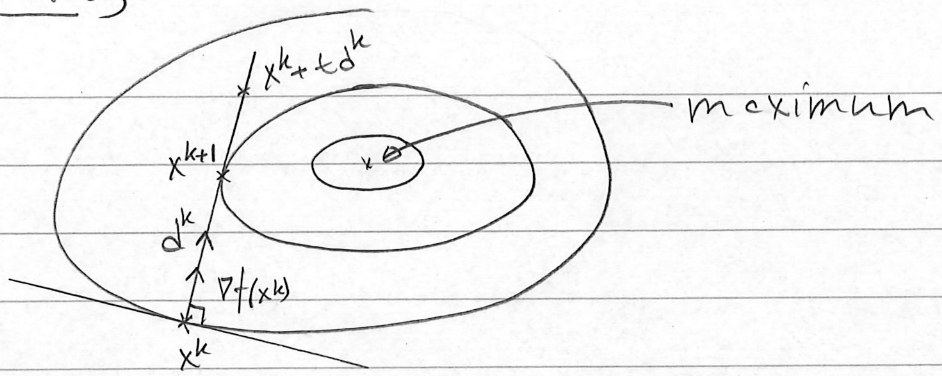
maximering: f ökar snabbast från x längs $d \,//\, \nabla f(x)$

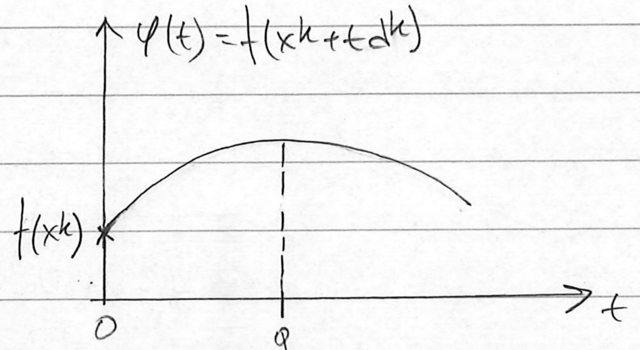
Brantaste lutningsmetoden:

minimering: $d^k \,//\, -\nabla f(x^k)$

maximering: $d^k \,//\, \nabla f(x^k)$

maximering:





$$\max_{t \geq 0} \varphi(t) = f(x^k + td^k) \Rightarrow t = t_k$$

optimalt steg $t_k \Rightarrow x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

Newtons modifierade metod

Givet ett $x^k \in \mathbb{R}^n$ med $\nabla f(x^k) \neq 0$.
Approximera f runt x^k med en andra ordningens Taylor-utveckling.

$$q(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k)$$

Sök en stationär punkt, betecknad $\bar{x}^k$, till $q(x)$.

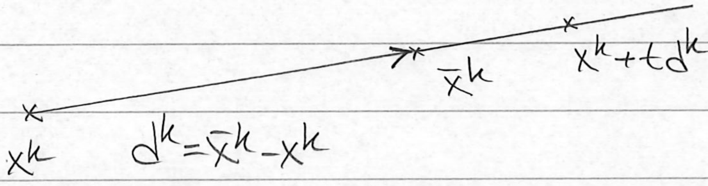
$$\nabla q(x) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x - x^k)$$

Om $\nabla^2 f(x^k)$ är icke-singulär så ger

$\nabla q(\bar{x}^k) = 0$ att $\bar{x}^k = x^k - \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k)$.

Newtons metod: välj $x^{k+1}=\bar{x}^k$.
(Ingen linjesökning används!)

Newtons <u>modifierade</u> metod: gör en <u>linjesökning</u> i riktningen $d^k=\bar{x}^k-x^k=-\nabla^2 f(x^k)^{-1}\nabla f(x^k)$



[$\nabla f(x^k)\neq 0$ och
$\det(\nabla^2 f(x^k))\neq 0$
$\Rightarrow d^k\neq 0$!]

Observera: Newtons metod $\Leftrightarrow$ valet $t=1$.

Riktningen $d^k=-\nabla^2 f(x^k)^{-1}\nabla f(x^k)$ används för <u>både</u> minimerings- och maximerings-problem.

Fås en avtagande riktning?

$$\nabla f(x^k)^T d^k=\left[-\nabla^2 f(x^k)\, d^k\right]^T d^k=-d^{kT}\nabla^2 f(x^k)\, d^k$$

Alltså: $\nabla^2 f(x^k)$ positivt definit $\Rightarrow \nabla f(x^k)^T d^k<0$
$\nabla^2 f(x^k)$ negativt definit $\Rightarrow \nabla f(x^k)^T d^k>0$
annars: $\nabla f(x^k)^T d^k<0$ eller $\nabla^2 f(x^k)^T d^k>0$

<u>Sats:</u> Om f är konvex på $\mathbb{R}^n$ och $\nabla^2 f(x^k)$ är icke-singulär så är $d^k=-\nabla^2 f(x^k)^{-1}\nabla f(x^k)$ en avtagande riktning för f i x^k.

Bevis: f konvex på $\mathbb{R}^n \Rightarrow \nabla^2 f(x)$ är positivt semidefinit på $\mathbb{R}^n \Rightarrow \nabla^2 f(x^k)$ är positivt semidefinit. Men om $\nabla^2 f(x^k)$ är icke-singulär så måste den då vara positivt definit, varför $\nabla f(x^k)^T d^k = -d^{k^T} \nabla^2 f(x^k) d^k < 0$.

Om f är icke-konvex: $d^k = -\nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k)$ kan vara en avtagenderiktning eller en ascentriktning!

Observera:

$\left.\begin{array}{l} \text{minimering} \\ d^k \text{ en ascentriktning} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\min_{t \geq 0} \phi(t) = f(x^k + t d^k)$ fås för $t = t_k = 0$.

Om d^k ger ascent: Ersätt $\nabla^2 f(x^k)$ med $\nabla^2 f(x^k) + \nu I$ där $\nu > 0$ är tillräckligt stor. Då är $d^k = -(\nabla^2 f(x^k) + \nu I)^{-1} \nabla f(x^k)$ en avtagenderiktning. Kallas Newton-Marquardt. (Återkommer på laboration 2.)

Exempel En iteration med brantaste lutningsmetoden på

$$\min_{x \in R^2} f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

från startpunkten $x^0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ med $f(x^0) = \frac{9}{4}$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 16x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 10x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Använd $d^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} // -\nabla f(x^0)$.

Låt $x^1(t) = x^0 + t d^0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - t \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

$$\varphi(t) = f(x^1(t)) = 8\, x_1^1(t) + 4\, x_1^1(t)\, x_2^1(t) + 5\, x_2^1(t) =$$ lägg till kvadrater

$$= 8\left(\frac{1}{4} - t\right)^2 + 4\left(\frac{1}{4} - t\right)\left(\frac{1}{2} - t\right) + 5\left(\frac{1}{2} - t\right)^2$$

Sök $\min_{t \geq 0} \varphi(t)$.

$$\varphi'(t) = -16\left(\frac{1}{4} - t\right) - 4\left(\frac{1}{2} - t\right) - 4\left(\frac{1}{4} - t\right) - 10\left(\frac{1}{2} - t\right) =$$

$$= 34t - 12 \begin{cases} < 0 & \text{om } t < \frac{6}{17} \\ > 0 & \text{om } t > \frac{6}{17} \end{cases}$$

Optimalt steg: $t_0 = \frac{6}{17}$.

$$x^1 = x^1\left(\frac{6}{17}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{6}{17} \\ \frac{1}{2} - \frac{6}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{68} \\ \frac{10}{68} \end{pmatrix} \text{ med } f(x^1) = \frac{9}{68}.$$

./.

Exempel Beräkna Newton-riktningen för

$$f(x) = x_1^4 + x_1 x_2 + (1+x_2)^2$$

i punkten $\bar{x} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)^T$ och avgör om den är en avtagenderiktning.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 + x_2 \\ x_1 + 2(1+x_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 27/4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Newton-riktning: $-\nabla^2 f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x}) =$

$$= -\begin{pmatrix} 27/4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Välj $\bar{d}_N = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Avtagenderiktning?

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{d}_N = \frac{1}{16}(7,4)\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{15}{16} < 0 \Rightarrow \text{ja!}$$

Alternativt: $\det(\nabla^2 f(\bar{x}) - \lambda I) =$

$$= \begin{vmatrix} \frac{27}{4} - \lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{27}{4} - \lambda\right)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{35}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{8}\right)^2 - \frac{25}{2}} \geq 0$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x})$ positivt definit

$\Rightarrow \bar{d}_N$ är en avtagenderiktning.