

Begränsad icke-linjär optimering

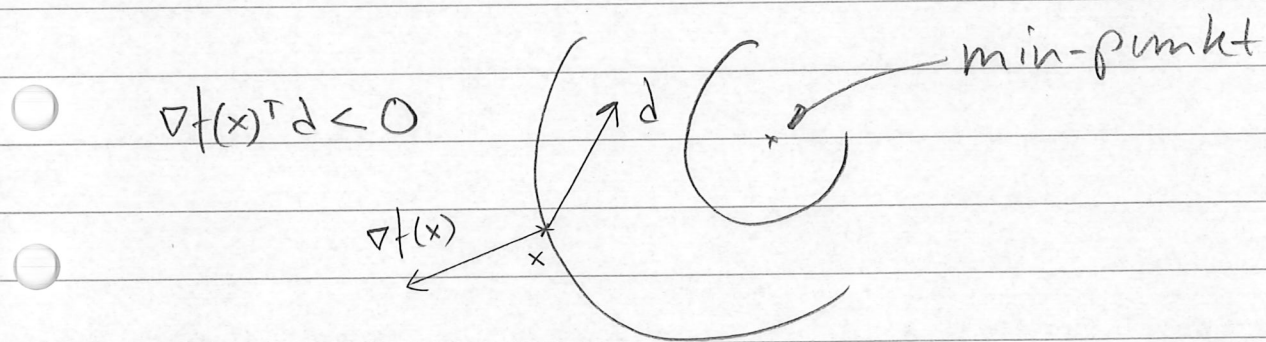
Problem: $\min f(x)$ (där $f \in C^1$ på X)
där $x \in X \subset \mathbb{R}^n$

Optimalitetsvillkor? Två synsätt:
primalt respektive dualt.

○ Först: primalt synsätt.

○ Utgångspunkt: betrakta ett $x \in X$, dvs en tillåten lösning, och en nollskild riktning $d \in \mathbb{R}^n$ från x .

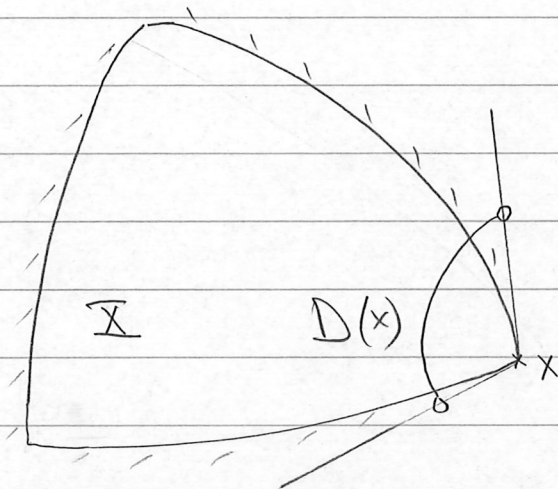
Från tidigare: om $\nabla f(x)^T d < 0$ gäller
så är $f(x+td) < f(x)$ för små $t > 0$.



Men för visse d kan $x+td \notin X$ gälla
för godtyckligt små $t > 0$.

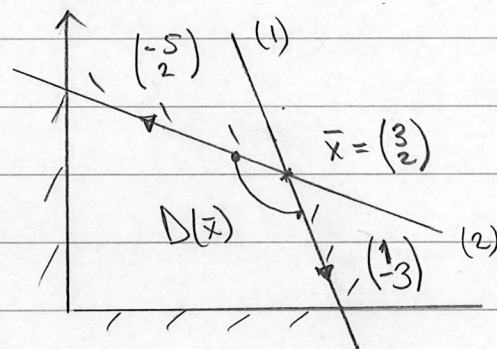
Definition: En riktning $d \neq 0$ är
tillåten från $x \in X$ om $x+td \in X$ gäller
för tillräckligt små $t > 0$.

Låt $D(x)$ vara mängden av tillåtna riktningar i $x \in X$.



Exempel Låt X definieras av villkore

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 16 & (2) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (3) \end{cases}$$



Tillåtna riktningar
i $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Låt $x = \bar{x} + td = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+td_1 \\ 2+td_2 \end{pmatrix}$. För vilka d uppfylls (1)-(3) för små $t > 0$?

- båda ska vara d_2
- (1) $\Rightarrow 3(3+td_1) + (2+td_2) \leq 11 \Rightarrow t(3d_1 + d_2) \leq 0 \Rightarrow 3d_1 + d_2 \leq 0$
 - (2) $\Rightarrow 2(3+td_1) + 5(2+td_2) \leq 16 \Rightarrow t(2d_1 + 5d_2) \leq 0 \Rightarrow 2d_1 + 5d_2 \leq 0$
 - (3) alltid uppfyllt för små $t > 0$!

Åltsa: $D(\bar{x}) = \{d \neq 0 \mid 3d_1 + d_2 \leq 0 \text{ och } 2d_1 + 5d_2 \leq 0\}$.

Eller: $D(\bar{x}) = \{d \neq 0 \mid d = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ där } d_1, d_2 \geq 0\}$. %

Sats: Om $x^* \in X$ är ett lokalt minimum
 så gäller $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$ för alla $d \in D(x^*)$.

Bevis: Om det finns $\bar{d} \in D(x^*)$ med $\nabla f(x^*)^T \bar{d} < 0$
 så fals:

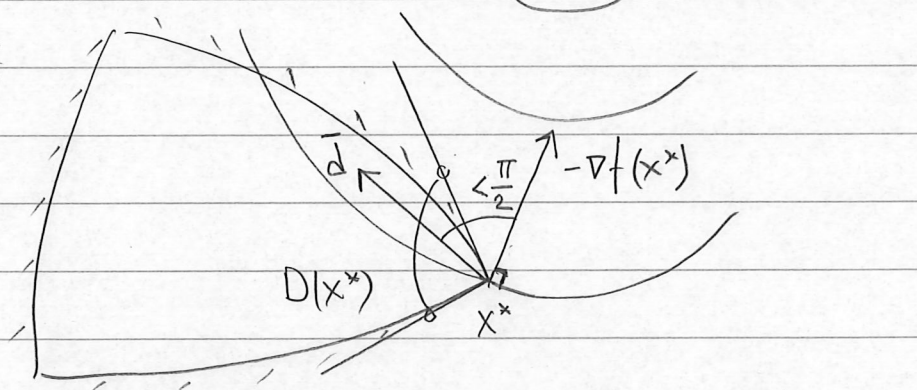
i) $x^* + t\bar{d} \in X$ för små $t > 0$

ii) $f(x^* + t\bar{d}) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T \bar{d} t + O(t^2) < f(x^*)$ för små $t > 0$.

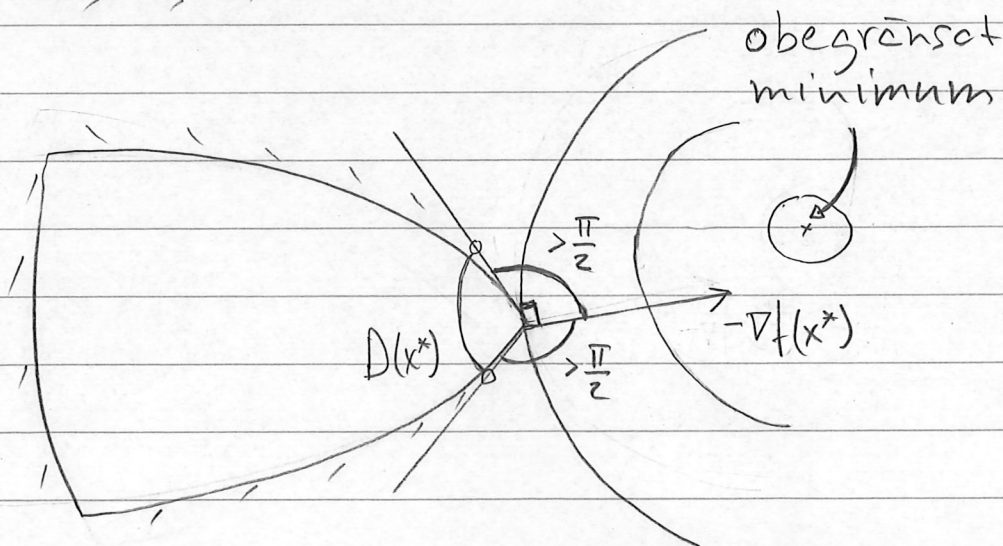
i) och ii) $\Rightarrow x^*$ är inte ett lokalt minimum.

Observera: $\nabla f(x^*)^T \bar{d} \geq 0$ för alla $d \in D(x^*) \Leftrightarrow$
 varje $d \in D(x^*)$ bildar en trubbig vinkel
 med $-\nabla f(x^*)$.

x^* är inte
 lokalt
 minimum

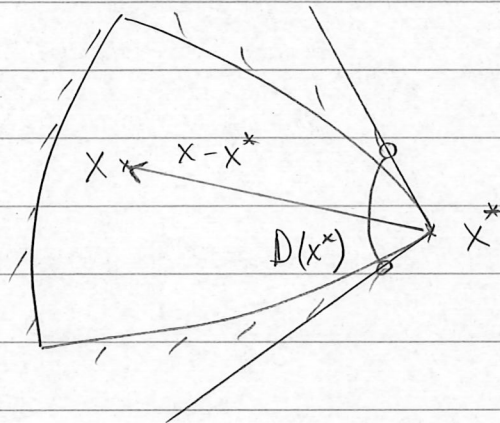


x^* är
 lokalt
 minimum



Ett $d \in D(x^*)$ med $\nabla f(x^*)^T d < 0$ kallas en tiltade utgångsriktning.

Observation: X konvex och $x^* \in X \Rightarrow \{x - x^* \mid x \in X\} \subseteq D(x^*)$.



Sats: Om X är konvex och f är konvex på X så gäller att x^* är ett globalt minimum om $\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0$ gäller för alla $x \in X$.

Bevis:

$\Rightarrow$: x^* globalt minimum $\Rightarrow x^*$ lokalt minimum

$\Rightarrow \nabla f(x^*)^T d \geq 0$ för alla $d \in D(x^*)$

$\Rightarrow \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0$ för alla $x \in X$

$\Leftarrow$: f konvex på $X \Rightarrow f(x) \geq f(x^*) + \underbrace{\nabla f(x^*)^T (x - x^*)}_{\geq 0}$

gäller för alla $x \in X$

$\Rightarrow f(x) \geq f(x^*)$ för alla $x \in X$

$\Rightarrow x^*$ globalt minimum

för alla $x \in X$

✓