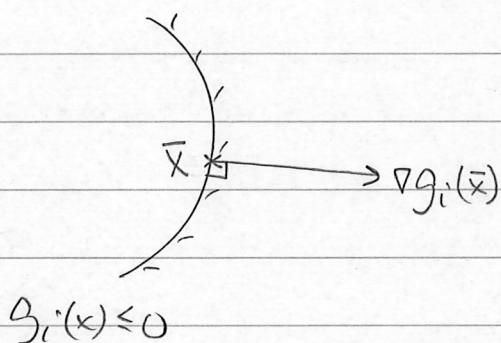


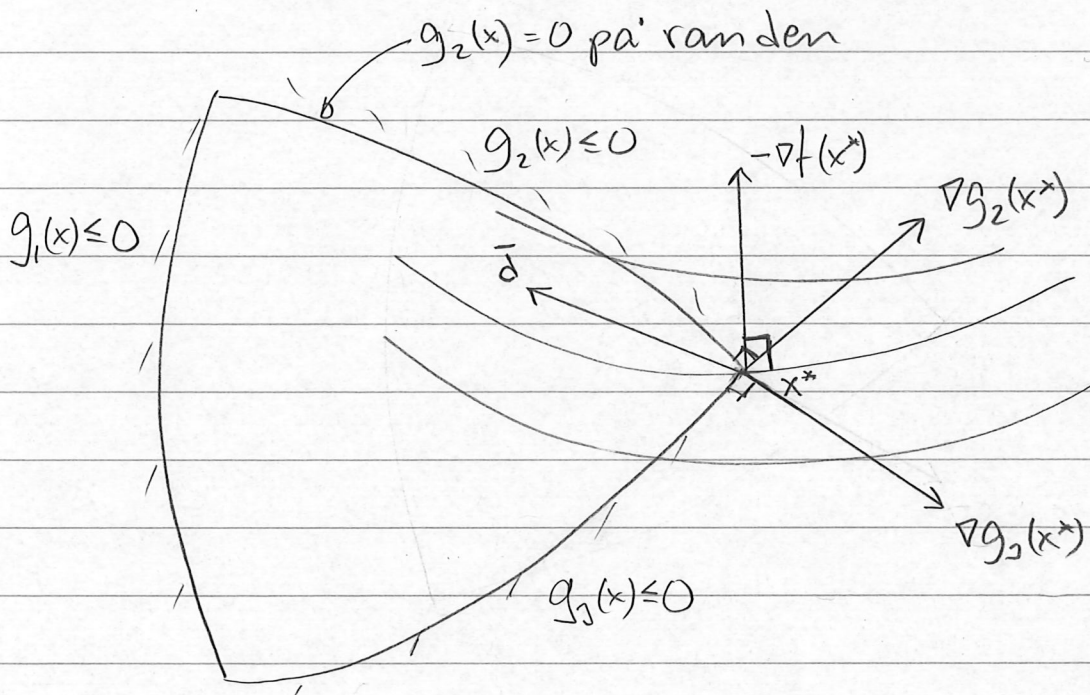
Nu: dualt synsett.

Låt $X = \{x \mid g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\}$ där $g_i \in C^1, i=1, \dots, m$.

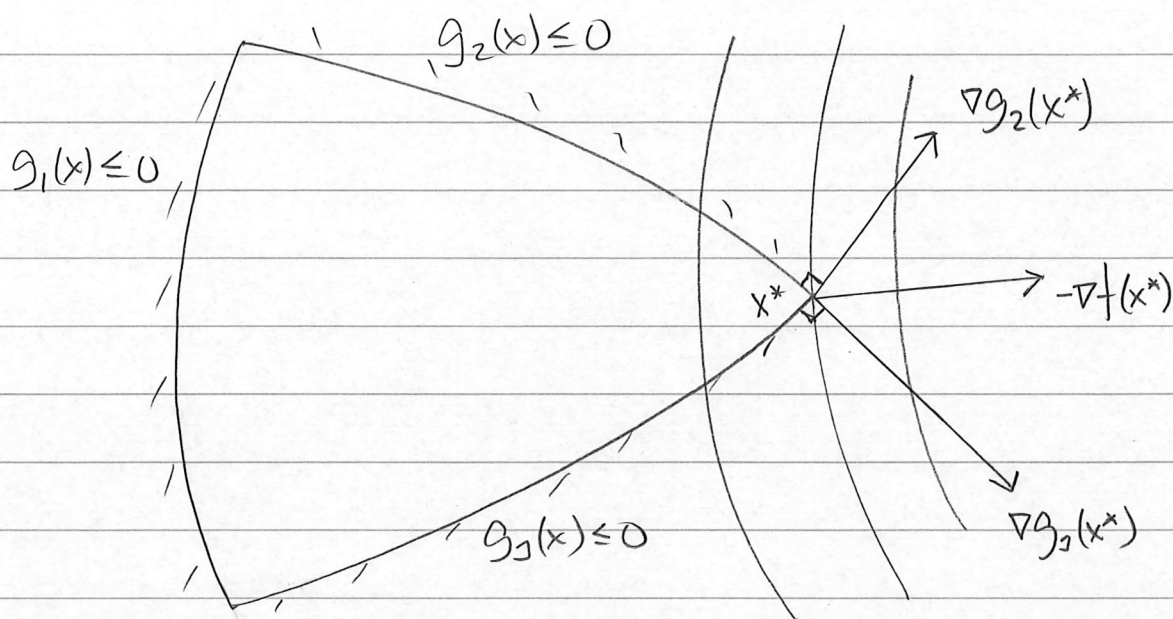
Observation: om $g_i(\bar{x}) = 0$ gäller så är $\nabla g_i(\bar{x})$ en utåtriktad normal för villkoret $g_i(x) \leq 0$ i punkte $\bar{x}$.



Om $x = \bar{x} + t \nabla g_i(\bar{x})$ där $t > 0$
så får $g_i(x) \approx g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}) =$
 $= g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T \nabla g_i(\bar{x}) t =$
 $= \|\nabla g_i(\bar{x})\|^2 t > 0 \Rightarrow$
punkte $\bar{x} + t \nabla g_i(\bar{x})$
uppfyller inte villkoret.
Alltså är $\nabla g_i(\bar{x})$ utåtriktad.



$\bar{d}$ är en tillåten avtagerriktning i $x^* \Rightarrow$
 x^* är inte ett lokalt minimum



- Det finns ingen tillåten utgående-
riktning i $x^* \Rightarrow x^*$ är ett lokalt
minimum.

Här gäller: $-\nabla f(x^*) = y_2^* \nabla g_2(x^*) + y_3^* \nabla g_3(x^*)$
där $y_2^*, y_3^* \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(x^*) + y_1^* \nabla g_1(x^*) + y_2^* \nabla g_2(x^*) + y_3^* \nabla g_3(x^*) = 0 \\ y_1^*, y_2^*, y_3^* \geq 0 \\ y_1^* g_1(x^*) = 0 \\ y_2^* g_2(x^*) = 0 \\ y_3^* g_3(x^*) = 0 \end{cases}$$

tg: $g_1(x^*) < 0 \Rightarrow y_1^* = 0$

$g_2(x^*) = 0$ och $g_3(x^*) = 0 \Rightarrow y_2^* g_2(x^*) = 0$ och $y_3^* g_3(x^*) = 0$

Observationen ovan generaliseras i
följande sats.

Sats: Antag att f och alla g_i är konvexa på X . Då är x^* ett globalt minimum till f över X om det finns $y_i^*, i=1, \dots, m$, sådana att

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* \nabla g_i(x^*) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_i^* \geq 0, \quad i=1, \dots, m & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_i(x^*) \leq 0, \quad i=1, \dots, m & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i=1, \dots, m. & (4) \end{cases}$$

Bevis: f och alla g_i konvexa på $X \Rightarrow$

funktionen $f + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i$ är konvex på $X \Rightarrow$

$$f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x)}_{\geq 0 \leq 0 \text{ da } x \in X} \geq f(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x^*)}_{=0} + \underbrace{\left(\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* \nabla g_i(x^*) \right)}_{=0} (x - x^*)$$

gäller för alla $x \in X$

$\Rightarrow f(x) \geq f(x^*)$ gäller för alla $x \in X$

(3) $\Rightarrow x^*$ tillåten

Åltså är x^* ett globalt minimum.

✓

Villkoren (1)-(4) kallas Karush-Kuhn-Tucker-villkor (KKT-villkor).

Storheterna y_i^* , $i=1, \dots, m$, är en generalisering av optimala dualvariabelvärden inom linjär optimering.

(1) & (2): dual tillåtenhet

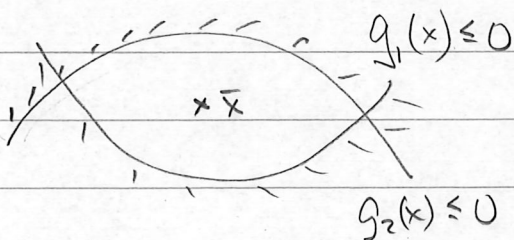
(3): primal tillåtenhet

(4): komplementaritet

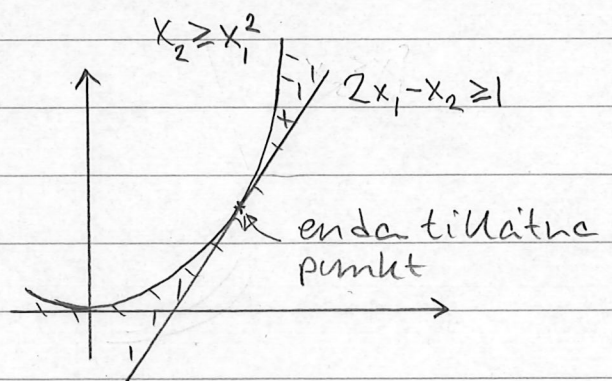
En lösning (x^*, y^*) till (1)-(4) kallas en KKT-punkt.

Satsen säger att (1)-(4) är tillräckliga för ett globalt minimum. Är de även nödvändiga för ett globalt minimum? Ja, om det tillåtna området innehåller en inre punkt.

Definition: Ett $\bar{x}$ är en inre punkt till $\{x \mid g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\}$ om $g_i(\bar{x}) < 0$ gäller för $i=1, \dots, m$.



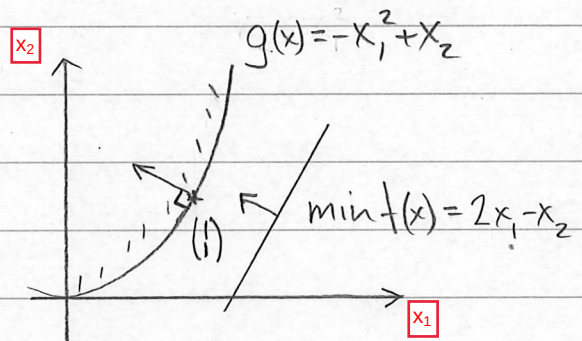
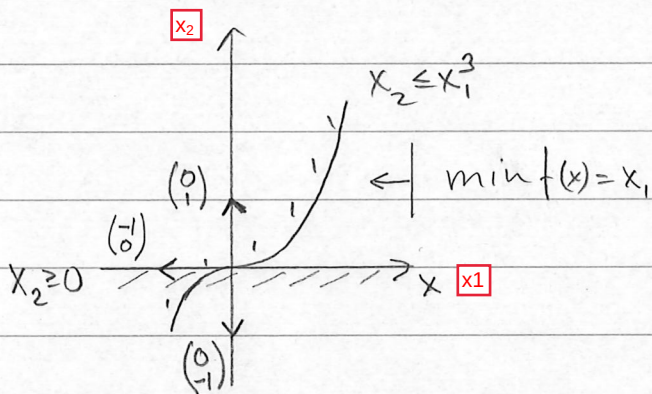
$\bar{x}$ är en inre punkt



inre punkt saknas

Sats: Om f och $g_i, i=1, \dots, m$, är konvexa och den tillåtna mängden $\{x \mid g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\}$ har en inre punkt så är KKT-villkoren nödvändiga och tillräckliga för global optimalitet.

För icke-konvexa problem: KKT-villkoren är varken nödvändiga eller tillräckliga ens för lokal optimalitet?



origo är ett lokalt och globalt minimum, men
 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sker lösning!

(1) är en KKT-punkt,
 ty $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y_1^* \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\nabla f(1,1) \quad \nabla g(1,1)$

har lösningen $y_1^* = 1 \geq 0$,
 men (1) är inte ett
 lokalt minimum!

Exempel $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2$
 da: $g_1(x) = x_1^2 - x_2 \leq 0$
 $g_2(x) = x_1 + x_2 \leq 2$

Är $\bar{x} = (-2, 4)^T$ ett globalt minimum?

Problemet är konvext och har en inre punkt (tex $x = (-1, 2)^T$). Undersök KKT-villkoren i $\bar{x}$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

KKT-villkor:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 4 \end{pmatrix} + y_1^* \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_1^*, y_2^* \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$\begin{cases} y_1^* (x_1^2 - x_2) = 0 \\ y_2^* (x_1 + x_2 - 2) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$\bar{x} = (-2, 4)^T$ ger likhet i (3), varför dessa och (4) är uppfyllade.

$\bar{x} = (-2, 4)^T$ i (1) ger

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} + y_1^* \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = -4 \\ y_2^* = -8 \end{cases}$$

$y^* = (-4, -8)^T$ bryter mot (2) $\Rightarrow \bar{x}$ är inte
en KKT-punkt och inte ett globalt
minimum

Geometrisk tolkning: $-\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ ligger
inte mellan bivinkors-
normalerna

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och

$$\nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

