

Grundläggande begrepp

Givet: En sluten mängd $X \subseteq \mathbb{R}^n$ och en kontinuerlig funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sökt: Ett globalt minimum till f över X , dvs ett $x^* \in X$ sådant att $f(x^*) \leq f(x)$ gäller för alla $x \in X$.

Ofta används beteckningen $f^* = f(x^*)$.

Optimeringsproblem: $f^* = \min_{x \in X} f(x)$

[eller $f^* = \min_{x \in X} f(x)$]

Ibland söks istället ett maximum.

Obs: $\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X} -f(x)$, dvs $\max_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow \min_{x \in X} -f(x)$

Obs: $x \in \mathbb{R}^n$, dvs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Oftast beskrivs X av bivillkor.

Exempel: $\min f(x) = x_1^2 + 3x_2 + e^{x_1 + x_3}$

$$\text{dä} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + x_2 x_3 \geq 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Här: $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \text{ uppfyller (1), (2) och (3)}\}$ %

Terminologi

x : variabler (eller variabelvektor)

X : mängden av tillåtna lösningar

f : målfunktion

$f(x)$: målfunktionsvärde (i punkte x)

x^* : optimal lösning eller optimum

$f(x^*)$, f^* : optimalt (eller minimalt)
målfunktionsvärde (eller
optimalvärde)

Olika fall för optimeringsproblem:

Om $X = \emptyset$ så saknas problemet tillåten
lösning (eller är otillåtet). Då
definieras $f^* = +\infty$.

Om $f \rightarrow -\infty$ på X så har problemet
obegränsat optimum, med $f^* = -\infty$.
Kan bara inträffa om X är obegränsad.

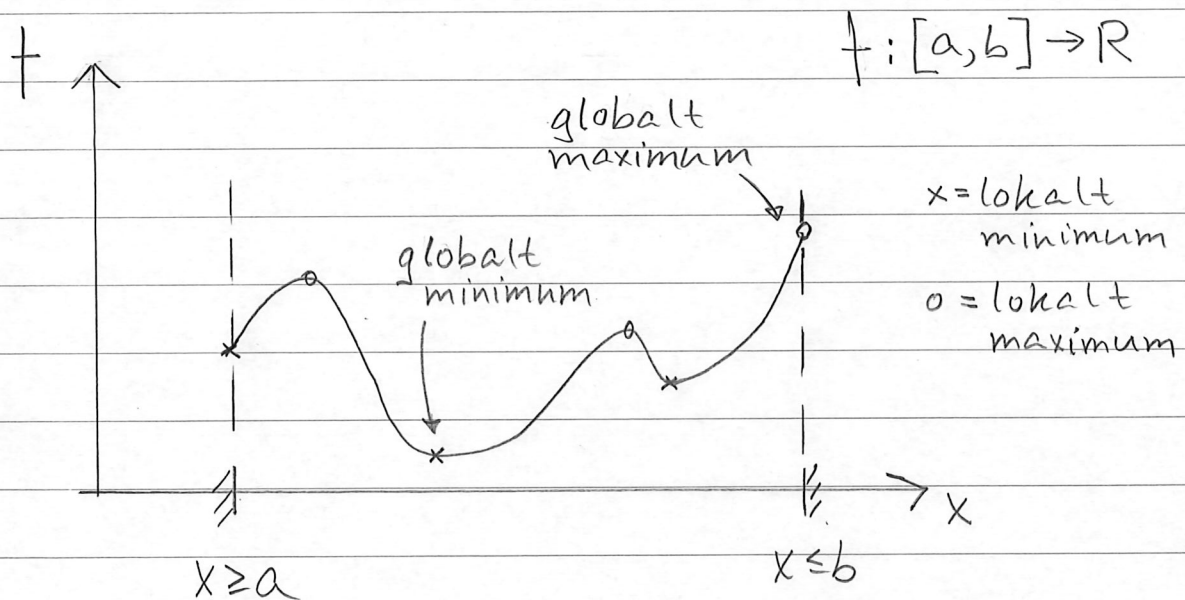
Om det finns distinkta (olika) $x^1, x^2 \in X$
sådana att $f(x^1) = f(x^2) = f^*$ så har problemet
alternativa optima.

Om det finns $x^* \in X$ sådant att $f(x^*) < f(x)$
gäller för alla $x \in X$ sådana att $x \neq x^*$ så
har problemet unikt optimum (i x^*).

Optimeringsproblem kan även ha lokala optima.

Definition: Ett $x^* \in X$ är ett lokalt minimum till f över X om det finns $\varepsilon > 0$ sådant att $f(x^*) \leq f(x)$ gäller för alla $x \in X \cap \{x \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$.

Ett globalt minimum är alltid även ett lokalt minimum.



Svårigheter:

- Optimeringsproblem kan ha många lokala optima.
- Det kan vara mycket svårt att avgöra om ett lokalt optimum även är globalt.

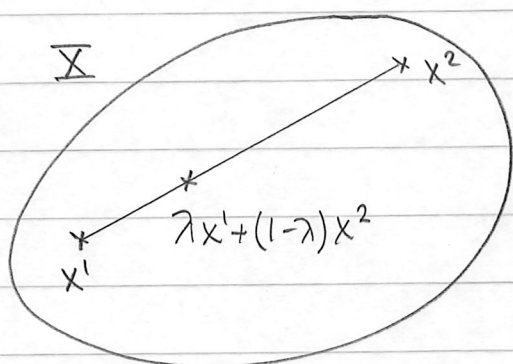
För vilka optimeringsproblem är ett lokalt optimum alltid även ett globalt optimum?
Under konvexitet!

Konvexitet

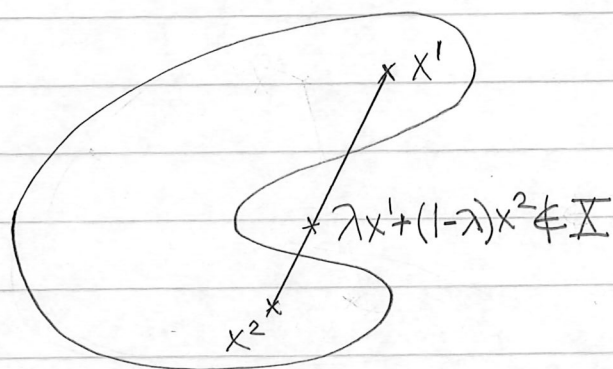
Definition: En mängd $X \subseteq \mathbb{R}^n$ är konvex om för alla $x^1, x^2 \in X$ och alla $\lambda \in [0, 1]$ gäller att $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$.

Observera att $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = \underbrace{x^2}_{\text{punkt}} + \underbrace{\lambda(x^1 - x^2)}_{\text{vektor från } x^2 \text{ till } x^1}$, varför

$\{x \mid x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \text{ där } \lambda \in [0, 1]\}$ utgör ett linjesegment mellan x^1 och x^2 .



konvex mängd



icke-konvex mängd

Punkten $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ är en konvexkombination av punkterna x^1 och x^2 .

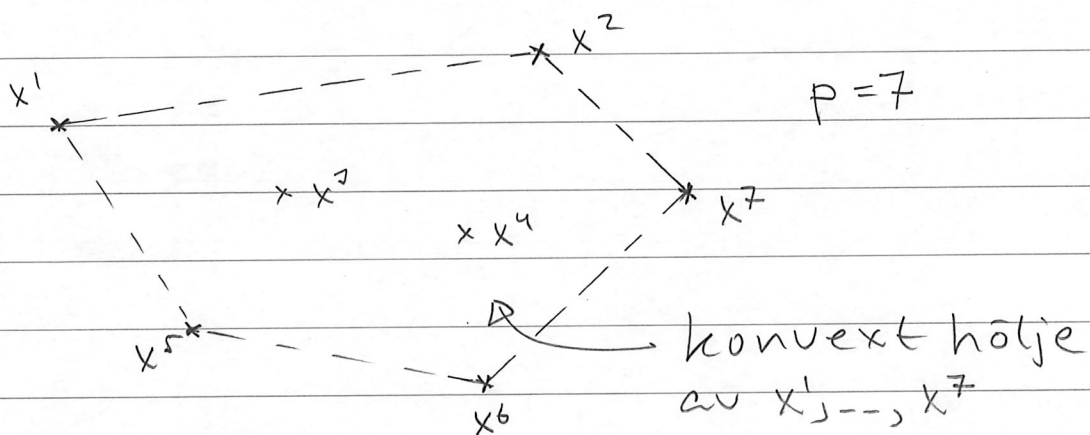
Konvexkombinationer kan konstrueras även för godtyckligt antal punkter; med p punkter, kallade $x^1, x^2, \dots, x^p$, ges en konvexkombination av

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i \text{ där } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \text{ och } \lambda_i \geq 0, i=1, \dots, p.$$

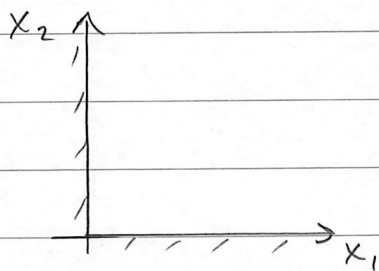
Mängden av alla möjliga konvex-kombinationer av $x^1, x^2, \dots, x^p$, dvs

$$\{x \mid x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i \text{ där } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \text{ och } \lambda_i \geq 0, i=1, \dots, p\}$$

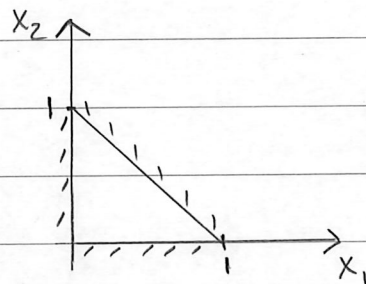
utgör det konvexa höljet av $x^1, x^2, \dots, x^p$.



Exempel på konvexa mängder:



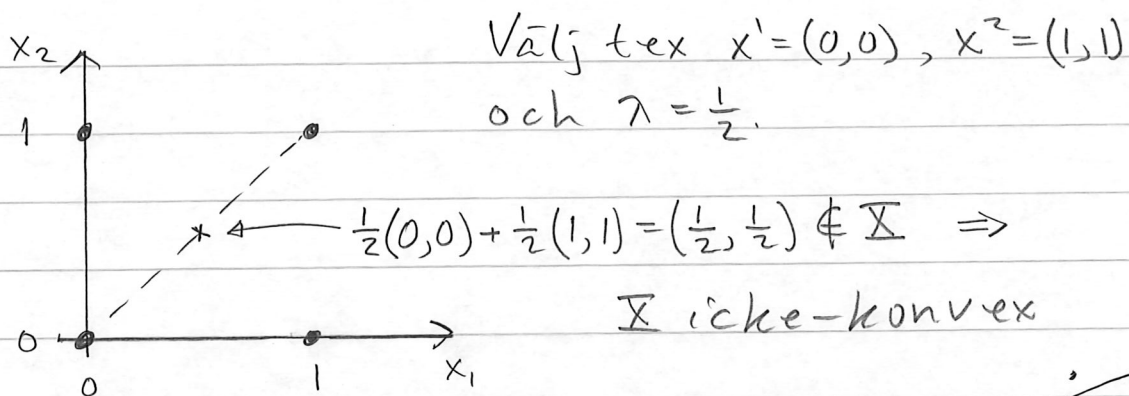
$$\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$$



$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1 \text{ och } x_1, x_2 \geq 0\} \neq$$

Tomma mängden är konvex och en punkt är konvex.
En diskret mängd med mer än ett element är alltid icke-konvex.

Exempel: $X = \{0, 1\}^2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$



Sats: Om mängderna $X_i \in \mathbb{R}^n$, $i=1, \dots, m$, är

konvexa så är mängden $\bigcap_{i=1}^m X_i$ konvex.

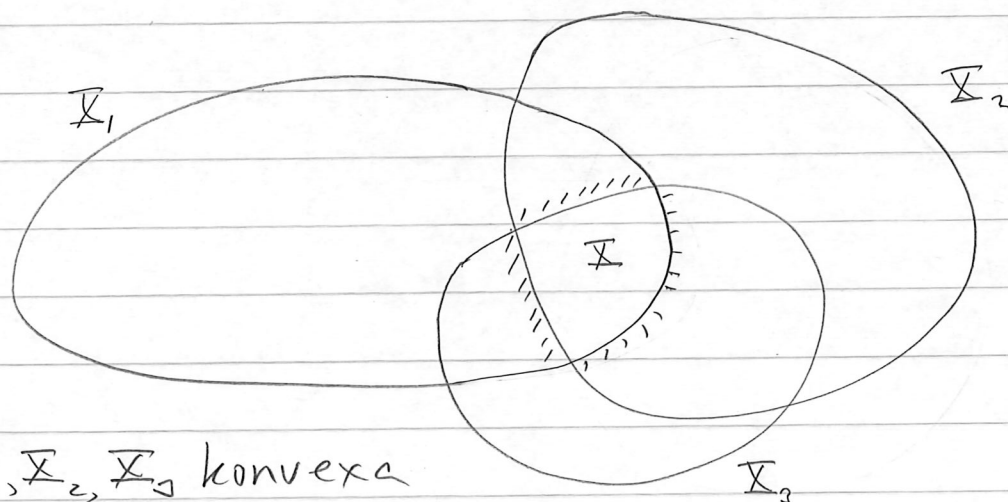
(Skärningen av konvexa mängder är konvex.)

Bevis: Låt $x^1, x^2 \in \bigcap_{i=1}^m X_i$ och $\lambda \in [0,1]$.

$$x^1, x^2 \in \bigcap_{i=1}^m X_i \Rightarrow x^1, x^2 \in X_i, i=1, \dots, m$$

$$X_i, i=1, \dots, m, \text{ konvexa} \Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X_i, i=1, \dots, m$$

$$\Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \bigcap_{i=1}^m X_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^m X_i \text{ konvex, } \checkmark$$

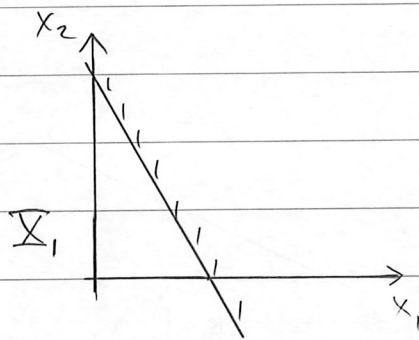


X_1, X_2, X_3 konvexa

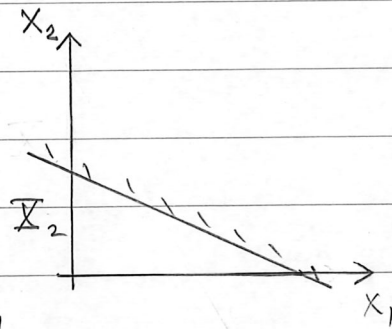
$\Rightarrow X = X_1 \cap X_2 \cap X_3$ konvex

Exempel: Är $\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 3, x_1 + 2x_2 \leq 3, x_1, x_2 \geq 0\}$
konvex?

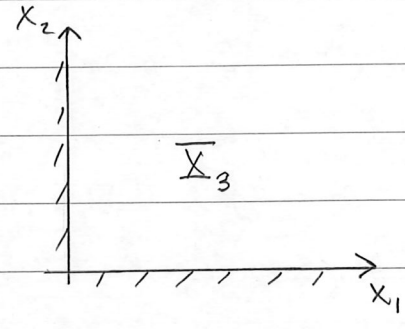
$$\bar{X} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 3\}}_{\bar{X}_1} \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 3\}}_{\bar{X}_2} \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}}_{\bar{X}_3}$$



konvex!



konvex!



konvex!

$\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ konvexa $\Rightarrow$
 $\bar{X} = \bar{X}_1 \cap \bar{X}_2 \cap \bar{X}_3$ konvex

