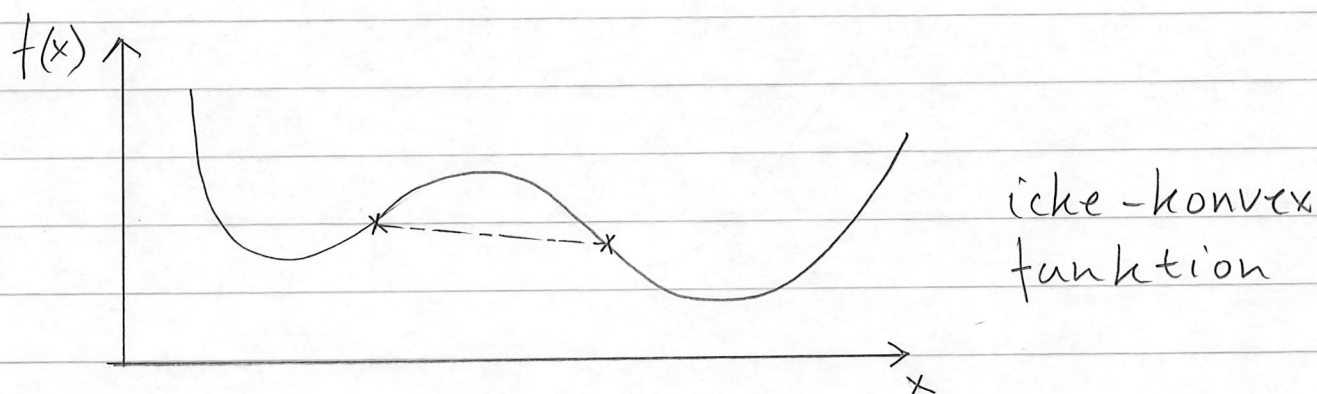
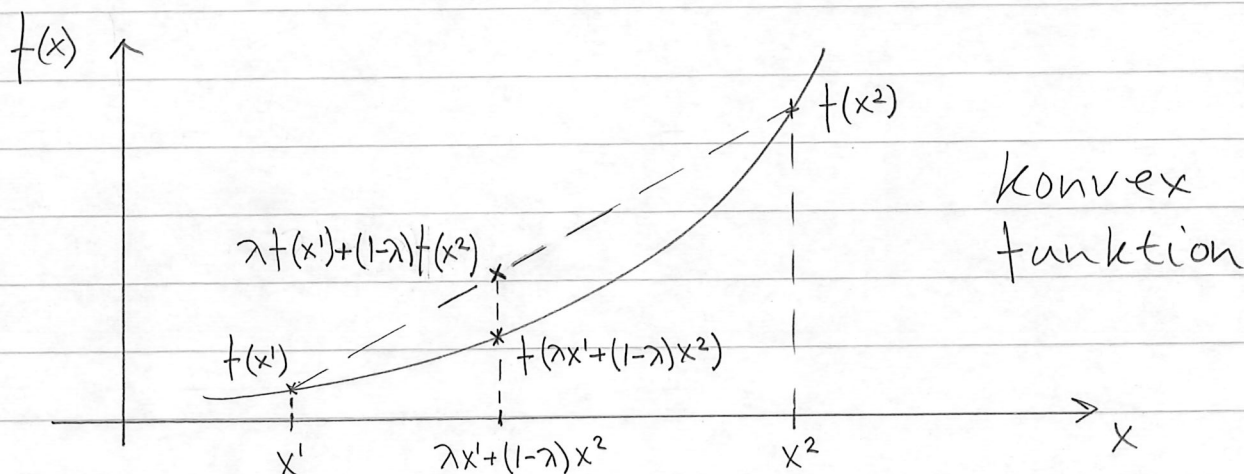


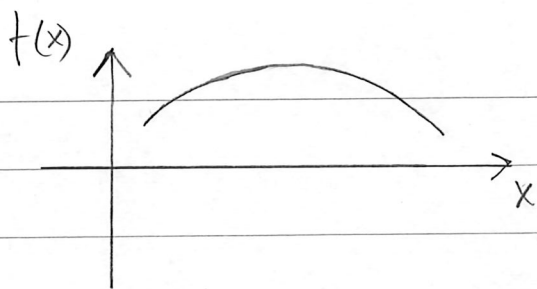
Definition: Låt $\bar{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en konvex mängd och låt f vara en reellvärd funktion som är definierad på $\bar{X}$. Då är f konvex på $\bar{X}$ om för alla $x^1, x^2 \in \bar{X}$ och alla $\lambda \in [0, 1]$ gäller att $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$.



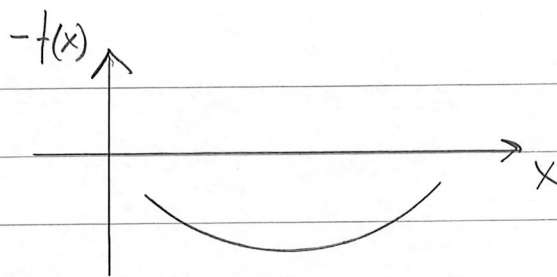
Om $n=1$, dvs om f är en funktion av en variabel, och $f \in C^2$ på $\bar{X}$ så gäller att f är konvex på $\bar{X}$ om $f''(x) \geq 0$ för alla $x \in \bar{X}$.

Definition: Funktionen f är konkav på $\bar{X}$ om $-f$ är konvex på $\bar{X}$.

$$[n=1: f \text{ konkav på } \bar{X} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \text{ för alla } x \in \bar{X}]$$

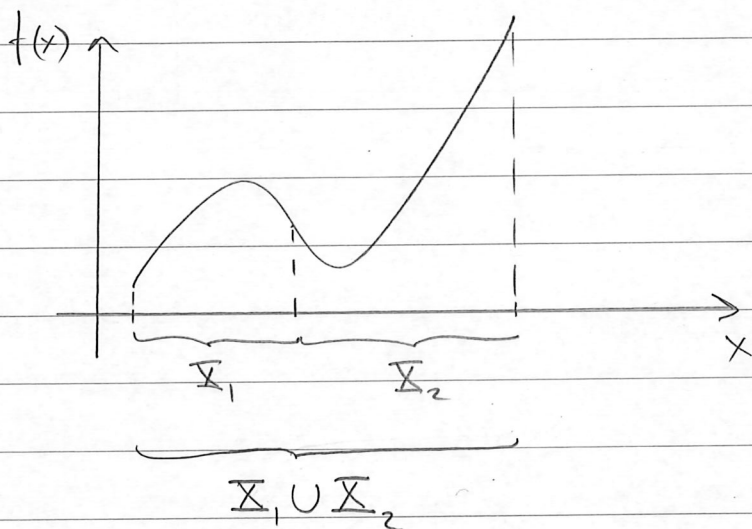


f konkav



$-f$ konvex

Observera att en funktions konvexitets-egenskaper kan bero på vilken mängd som studeras.



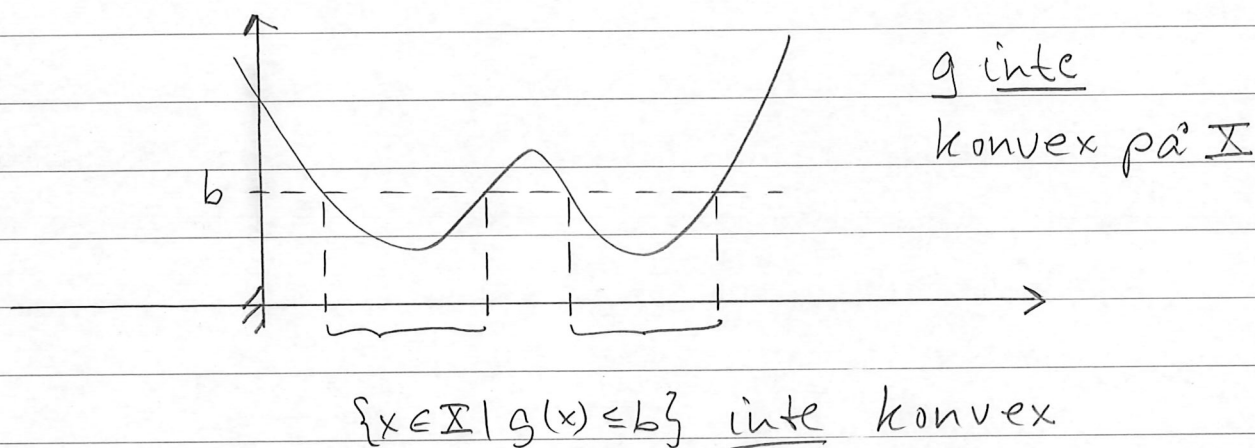
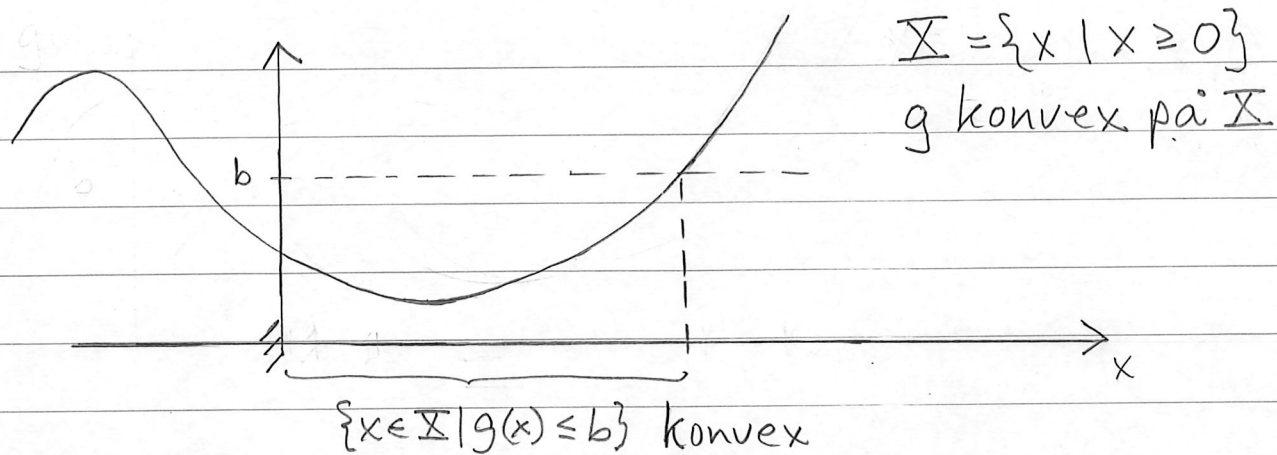
Konkav på X_1 och konvex på X_2 , men varken konvex eller konkav på $X_1 \cup X_2$.

En linjär funktion $f(x) = a^T x + b = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$ är både konvex och konkav, ty för sådana gäller att $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$.

Sats: Låt funktionerna $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$, vara konvexa på X och låt $d_i \geq 0$, $i=1, \dots, m$. Då är funktionen $\sum_{i=1}^m d_i f_i$ konvex på X .

Exempel: Är $f(x) = 2e^x + 3x^2$ konvex på $\mathbb{R}$?

$f_1(x) = e^x$ konvex på $\mathbb{R}$ (ty $f_1''(x) = e^x \geq 0$ på $\mathbb{R}$)
 $f_2(x) = x^2$ konvex på $\mathbb{R}$ (ty $f_2''(x) = 2 \geq 0$ på $\mathbb{R}$)
 $\Rightarrow f(x) = 2f_1(x) + 3f_2(x)$ konvex på $\mathbb{R}$. $\checkmark$



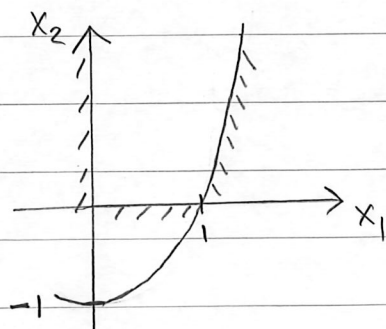
Exempel: Är mängden som definieras av $x_1, x_2 \geq 0$ och $x_1^2 - x_2 \leq 1$ konvex?

Låt $X = \{x \mid x_1, x_2 \geq 0\}$. Denna är konvex.

$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1^2) = 2 \geq 0$ för alla $x_1 \Rightarrow x_1^2$ konvex för alla x_1 ,
 $-x_2$ är linjär $\Rightarrow -x_2$ är konvex för alla x_2

Alltså är $g(x) = x_1^2 - x_2$ konvex för alla x_1 och x_2 ,
 och speciellt på X .

Enligt satsen är
 mängden då konvex!



Definition: Om mängden X är konvex och funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ är konvex på X så är problemet $\min_{x \in X} f(x)$ konvext.

[Maximeringsproblem: f ska istället vara konkav på X .]

Sats: Varje lokalt optimum till ett konvext problem är även globalt.

Bevis: (minimeringsproblem)

Antag ett $x^* \in X$ inte är ett globalt minimum.
Då finns ett $\bar{x} \in X$ med $f(\bar{x}) < f(x^*)$.

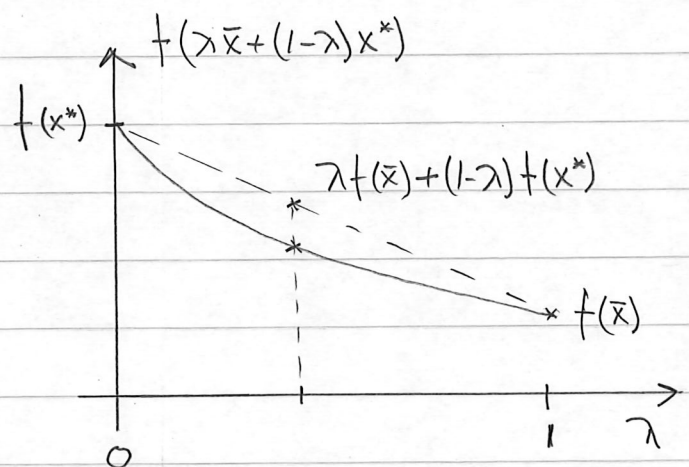
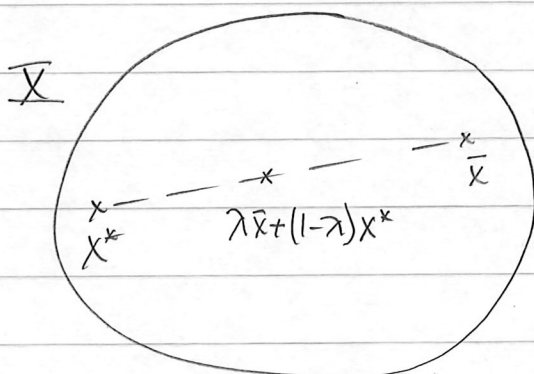
X konvex $\Rightarrow \lambda \bar{x} + (1-\lambda)x^* \in X$ för alla $\lambda \in [0, 1]$

f konvex på $X \Rightarrow f(\lambda \bar{x} + (1-\lambda)x^*) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda)f(x^*) =$
 $= f(x^*) + \lambda(f(\bar{x}) - f(x^*)) < f(x^*)$ då $\lambda > 0$

Alltså är x^* inte ett lokalt minimum.

Varje lokalt minimum är därför även globalt.

%



Sats: (sammansättande)

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ konvex} \\ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex (konkav) på } X \\ g_i: X \rightarrow \mathbb{R}, i=1, \dots, m, \text{ konvexa på } X \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ problemet min (max) $f(x)$ är konvext
da $g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m$
 $x \in X$

Exempel: Är problemet

$$\begin{array}{l} \max 5\ln(x_1+1) - 4x_1^2 - 2e^{x_2} \\ \text{da } x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

konvext?

Mha andraderivator får att $\ln(x_1+1)$, $-x_1^2$ och $-e^{x_2}$ är konkava $\Rightarrow 5\ln(x_1+1) + 4(-x_1^2) + 2(-e^{x_2})$

är konkav.

$x_1^2 + x_2^2$ är konvex.

$$x_1 + x_2 \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{-x_1 - x_2 \leq -1}_{\text{linjär}} \Rightarrow \text{konvex}$$

$\{x \mid x_1, x_2 \geq 0\}$ är konvex

$\left. \begin{array}{l} \text{maximering} \\ \text{konkav målfunktion} \\ \text{konvext tillåtet område} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{konvext problem!}$

✓