

Lagrange-dualitet

Problem: $f^* = \min f(x)$
 (P) da: $g(x) \leq 0$ $x \in \bar{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\text{där } g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$

[P = primal problem]

Antagonisten:

○ • $f \in C^1$ och $g_i \in C^1, i=1, \dots, m$

- X slutten

- minimeringsproblem över X kan lösas med lite beräkningar jämfört med att lösa (P), varför $g(x) \leq 0$ är komplicerande sidovillkor

Vidare: mängden X beskrivs vanligen med bivillkor, den kan vara begränsad

eller obegränsad och konvex eller icke-konvex.

Exempel $\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

da: $\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$ (ett villkor)

$$\sum_{j=1}^n x_j = k$$
$$x_j = 0/1, \quad j=1, \dots, n$$

där k är ett heltal mellan 1 och $n-1$.

Ett knappsäcksproblem där exakt k stycken varor ska anta värdet ett!

$$\text{Problemet } \max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$
$$\text{då } \sum_{j=1}^n x_j = k$$
$$x_j = 0/1, \quad j=1, \dots, n$$

Löses mycket enkelt genom att man finner de k största c_j och sätter motsvarande x_j till ett.

Alltså: $X = \{x_j = 0/1, j=1, \dots, n \mid \sum_{j=1}^n x_j = k\}$ och

$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$ är komplicerande sidovillkor.

Här: X är begränsad och icke-konvex.

∴

Strategi: istället för att ta hänsyn till villkoren $g(x) \leq 0$ explicit, tar de hänsyn till implicit med hjälp av en straffterm som är linjär i $g(x)$.

[Strafffunktionsmetoder: strafftermen är icke-linjär i $g(x)$.]

Inför multiplikatorvektorn $u \in \mathbb{R}^m$ med $u \geq 0$ och bilda Lagrange-funktionen

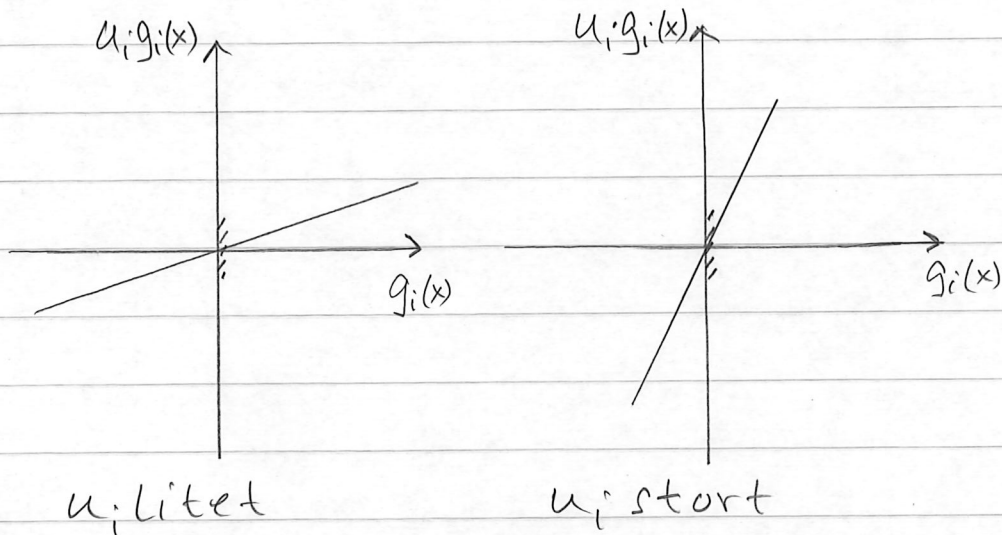
$$L(x, u) = f(x) + u^T g(x) \left[= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) \right].$$

Problemet

$$\min_{x \in X} L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$$

kallas en Lagrange-relaxation av (P)
[eller ett Lagrange-subproblem].

Observera: enligt antagande kan detta problem lösas med lite beräkningar jämfört med att lösa (P)!

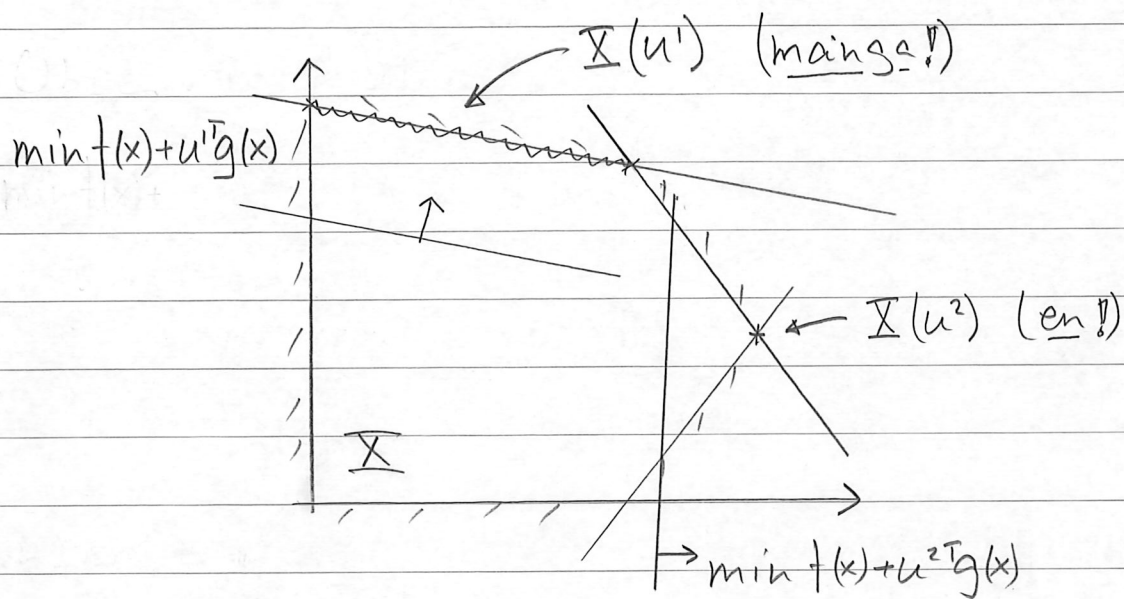


$g_i(x) > 0 \Rightarrow u_i g_i(x) > 0$, vilket är ofördelaktigt i Lagrange-relaxationen (ty minimering), dvs otillåtna $x \in X$ kommer att straffas i Lagrange-relaxationen!

$$\text{Låt } \underline{X}(u) = \{x \mid x \text{ optimal i } \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x)\},$$

dvs mängden av optimala lösningar till

Lagrange-relaxationer som funktion av u .



$X(u)$ kan vara en punkt eller mängd!

$X(u) \subseteq X$ gäller alltid.

Låt $x(u) \in X(u)$, dvs $x(u)$ är naigon optimallösning till $\min_{x \in X} f(x) + u^T g(x)$.

$x(u) \in X$ gäller alltid.

Oftast gäller $g(x(u)) \neq 0$, dvs att $x(u)$ är otillåten i (P) .

Om $g(x(u)) \leq 0$ gäller, dvs $x(u)$ är tillåten i (P) , så gäller att $f^* \leq f(x(u))$, dvs $f(x(u))$ utgör en pessimistisk skattning av f^* .

Låt $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ med $h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x)$.

Observera: för att beräkna värdet på funktionen h i punkte u måste optimeringsproblemet
 $\min_{x \in \mathbb{X}} f(x) + u^T g(x)$ lösas.

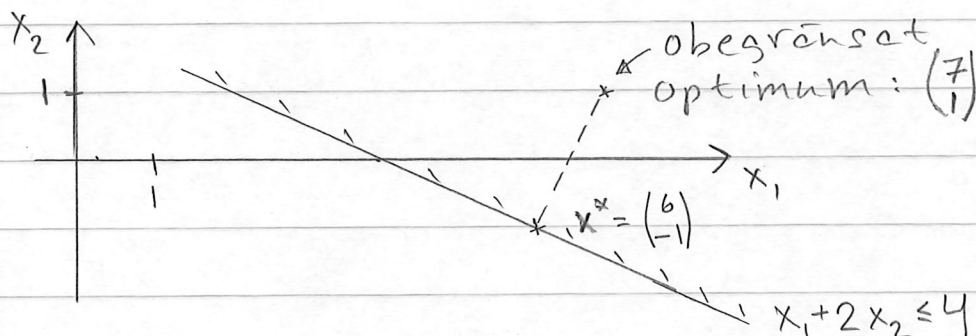
h är alltså en implicit funktion.

I vissa enkla fall går det dock att finna ett explicit uttryck för $h(u)$.

Exempel 1 $f^* = \min f(x) = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 1)^2$

(P) då $g(x) = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \quad | \quad u \geq 0$
 $x \in \mathbb{X} = \mathbb{R}^2$

[Optimum: $x^* = (6, -1)^T$ med $f^* = 5$]



$$L(x, u) = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 1)^2 + u(x_1 + 2x_2 - 4) =$$

$$= -4u + (x_1 - 7)^2 + ux_1 + (x_2 - 1)^2 + 2ux_2$$

$$h(u) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{-4u + (x_1 - 7)^2 + ux_1 + (x_2 - 1)^2 + 2ux_2\} =$$

$$= -4u + \underbrace{\min_{x_1 \in \mathbb{R}} \{(x_1 - 7)^2 + ux_1\}}_{\text{konvext obegränsat problem}} + \underbrace{\min_{x_2 \in \mathbb{R}} \{(x_2 - 1)^2 + 2ux_2\}}_{\text{konvext obegränsat problem}}$$

Separation
 över x_1 och x_2

konvext
 obegränsat
 problem

konvext
 obegränsat
 problem

I det här exemplet är det möjligt att ta fram ett explicit uttryck för $h(u)$.

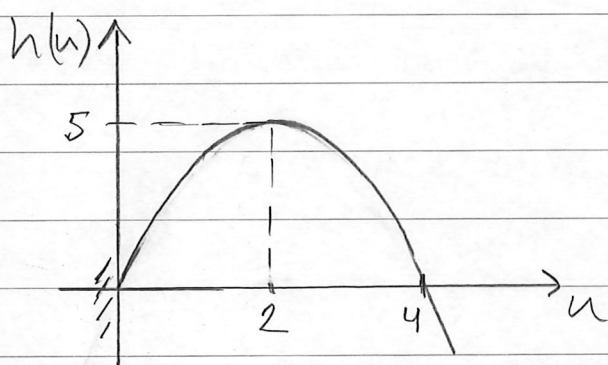
$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{ (x_1 - 7)^2 + ux_1 \} = 2(x_1 - 7) + u = 0 \Rightarrow x_1(u) = 7 - \frac{u}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \{ (x_2 - 1)^2 + 2ux_2 \} = 2(x_2 - 1) + 2u = 0 \Rightarrow x_2(u) = 1 - u$$

För godtyckligt u löses alltså minimeringen av $x(u) = \begin{pmatrix} 7 - u/2 \\ 1 - u \end{pmatrix}$. Sätt in!

$$h(u) = -4u + (x_1(u) - 7)^2 + ux_1(u) + (x_2(u) - 1)^2 + 2ux_2(u) =$$

$$= \dots = 5u(1 - u/4) \quad (\text{explicit!})$$



här är här:

- kontinuerlig
- kontinuerligt differentierbar
- konkav

$x(u)$ otillåten $\bullet$ $x(u)$ tillåten

Är $x(u)$ tillåten för några u ? Sätt in!

$$g(x(u)) \leq 0 \Leftrightarrow x_1(u) + 2x_2(u) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$7 - \frac{u}{2} + 2(1 - u) \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}u \leq -5 \Leftrightarrow u \geq 2$$

