

Vilka egenskaper har h generellt?

Sats: $\left. \begin{array}{l} X \text{ sluten och begränsad} \\ f \text{ och } g \text{ kontinuerliga på } X \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow h$ är ändlig, kontinuerlig
och konvex på $\mathbb{R}^m$.

[h ändlig på $\mathbb{R}^m$ innebär att h antar
ändliga värden för alla punkter i $\mathbb{R}^m$]

Bevis: i) f och g kontinuerliga på $X \Rightarrow$
 $f + u^T g$ kontinuerlig på X .

Eftersom X är sluten och begränsad så
följer då att $h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x) > -\infty$.

[analys: en kontinuerlig funktion på en
kompakt (= sluten och begränsad) mängd
antar största och minsta värden]

(i) Låt $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^m$ och $\lambda \in [0, 1]$. Då fås att
 $h(\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2) = \min_{x \in X} \{f(x) + (\lambda u^1 + (1-\lambda)u^2)^T g(x)\} =$

$$= \min_{x \in X} \{ \lambda (f(x) + u^{1T} g(x)) + (1-\lambda) (f(x) + u^{2T} g(x)) \} \geq$$

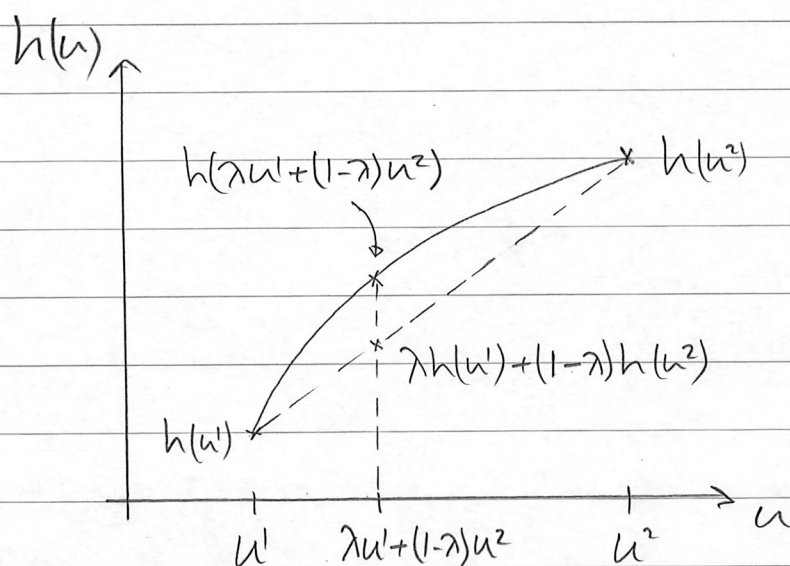
$$\geq \min_{x \in X} \{ \lambda (f(x) + u^{1T} g(x)) \} + \min_{x \in X} \{ (1-\lambda) (f(x) + u^{2T} g(x)) \} =$$

$\lambda \geq 0$
 $1-\lambda \geq 0$

$$= \lambda \min_{x \in X} \{f(x) + u^{1T} g(x)\} + (1-\lambda) \min_{x \in X} \{f(x) + u^{2T} g(x)\} =$$

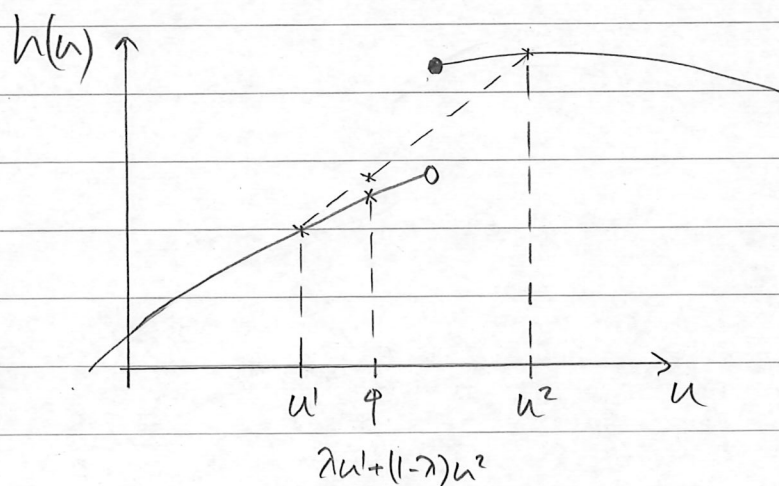
$$= \lambda h(u^1) + (1-\lambda) h(u^2).$$

Attse är h konkeu på $\mathbb{R}^m$.



iii) $\left. \begin{array}{l} h \text{ ändlig på } \mathbb{R}^m \\ h \text{ konkeu på } \mathbb{R}^m \end{array} \right\} \Rightarrow h \text{ kontinuertlig på } \mathbb{R}^m$

ty en diskontinuitet skulle motsäga konkeuiteten.

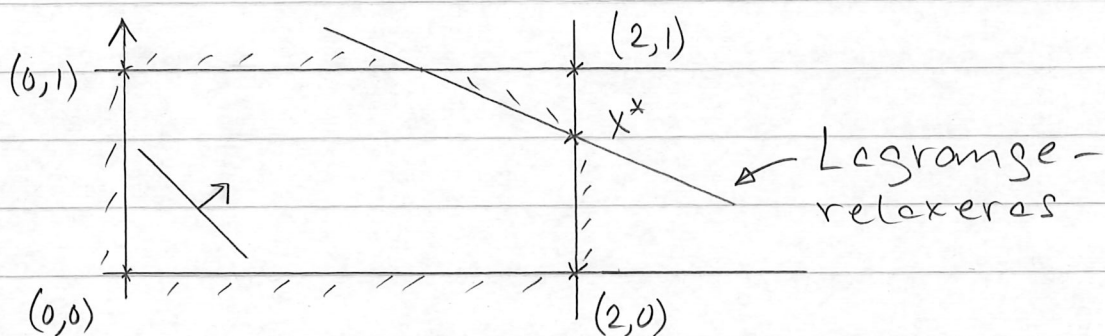


Observera: h är ofta inte differentierbar i alla punkter!

Exempel 2 $f^* = \max x_1 + x_2$

$$(P) \quad \text{dä} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 & : g(x) \leq 0 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} : \mathbb{R}$$

Ätt LP! [Optimum: $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ med $f^* = 8/3$.]



$$L(x, u) = x_1 + x_2 - u(2x_1 + 3x_2 - 6)$$

↑
maximering

$$h(u) = \max \{ x_1 + x_2 - u(2x_1 + 3x_2 - 6) \}$$
$$\text{dä} \begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

u fixt $\Rightarrow$ LP i $x \Rightarrow$ optimum i hörnpunkt!

Hörnpunkter och målfunktionsvärden:

$$(0,0): 0 - u(0-6) = 6u$$

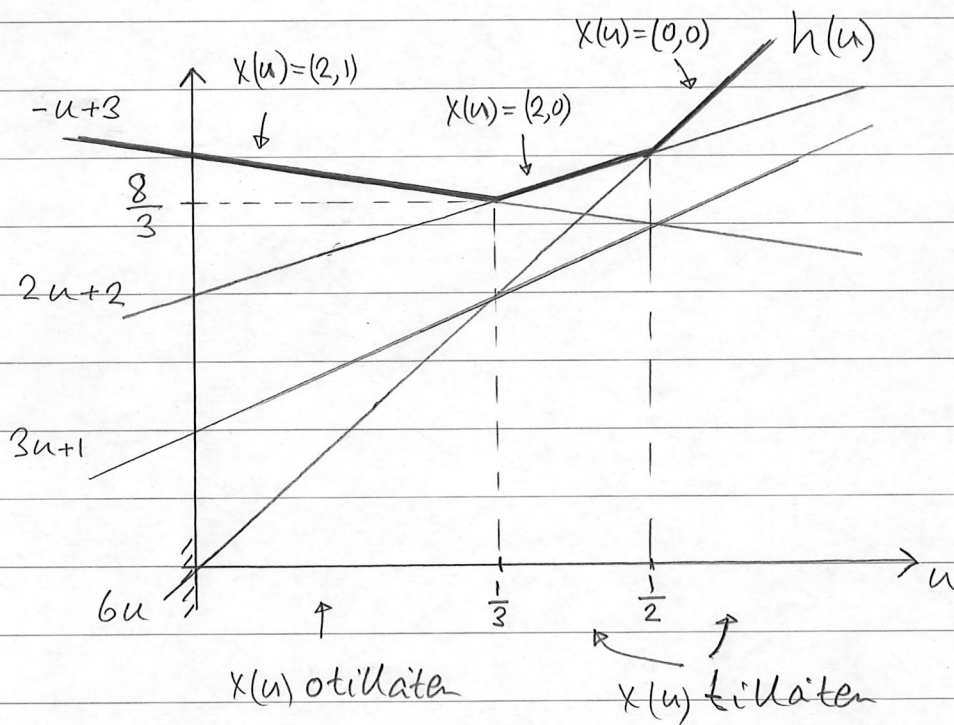
$$(2,0): 2 - u(4-6) = 2u+2$$

$$(0,1): 1 - u(3-6) = 3u+1$$

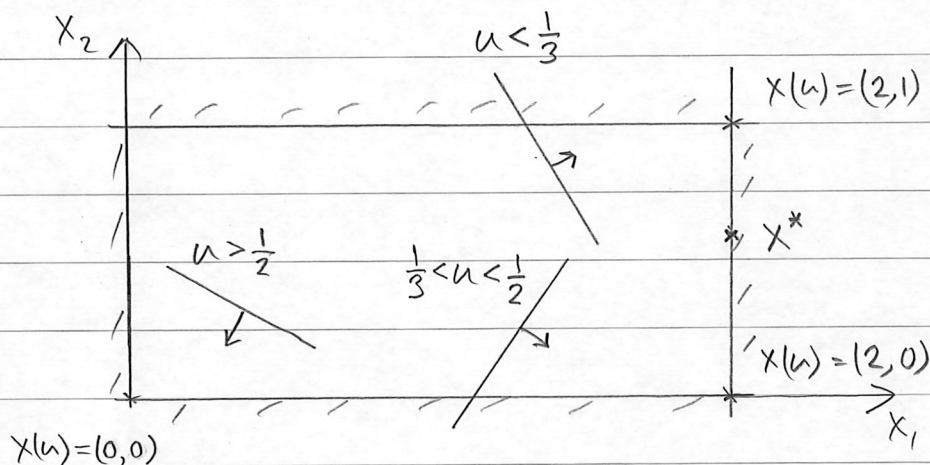
$$(2,1): 3 - u(7-6) = -u+3$$

För varje värde på u väljs den bästa hörnpunkt som ger maximalt målfunktionsvärde! Alltså:

$$h(u) = \max\{6u, 2u+2, 3u+1, -u+3\}$$



$(0,1)$ är aldrig bäst,
dvs $x(u) = (0,1)$
är aldrig!



$$\max x_1 + x_2 - u(2x_1 + 3x_2 - 6)$$

h är ändlig, kontinuerlig och konvex på $\mathbb{R}$. [Konvex, ty (P) maximering!]
Dock: h är stuckvis linjär och inte differentierbar för $u = \frac{1}{3}$ och $u = \frac{1}{2}$. %