Relationer mellan det givna problemet

$$(P)\quad f^* = \min f(x) \quad \text{då } g(x) \le 0 \ \mid u \ge 0, \quad x \in X$$

och dess Lagrange-relaxation

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x) \quad ?$$

<u>Sats:</u> (svag dualitet)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} \text{ tillåten i } (P) \\ \bar{u} \ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow h(\bar{u}) \le f(\bar{x})$$

<u>Bevis:</u> $\bar{x}$ tillåten $\Rightarrow$ $\bar{x} \in X$ och $g(\bar{x}) \le 0$

Då gäller: $h(\bar{u}) = \min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^T g(x) \underset{\bar{x} \in X}{\le}$

$$\le f(\bar{x}) + \underbrace{\underbrace{\bar{u}^T}_{\ge 0} \underbrace{g(\bar{x})}_{\le 0}}_{\le 0} \le f(\bar{x}). \quad //$$

<u>Följdsats:</u> För alla $u \ge 0$ gäller $h(u) \le f^*$.

<u>Bevis:</u> Välj $\bar{x}$ som ett optimum till (P). //

<u>Exempel 1</u> För alla $u \ge 0$ gäller enligt figur att $h(u) = 5u(1 - \frac{u}{4}) \le 5 = f^*$.

<u>Exempel 2</u> För alla $u \ge 0$ gäller enligt figur att $h(u) = \max\{6u, 2u+2, 3u+1, -u+3\} \ge \frac{8}{3} = f^*$.
[(P) maximering $\Rightarrow h(u) \ge f^*$ för alla $u \ge 0$!]

Tolkning: För varje $u \geq 0$ ger $h(u)$ en optimistisk skattning av f^*.

Observera: f^* är okänd, och att finna f^* skulle vara beräkningskrävande, medan det krävs jämförelsevis lite beräkningar att finna värdet $h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^T g(x)$, eftersom detta optimeringsproblem antogs kräva lite beräkningar jämfört med (P).

För varje $u \geq 0$ gäller $\min f(x) + u^T g(x) \leq f^*$, varför $\min_{x \in X} f(x) + u^T g(x)$ är en relaxation av (P).

Lagrange-relaxation = relaxation med hjälp av en Lagrange-funktion.

Exempel 3

$$
(P) \quad
\begin{aligned}
f^* = \max\ & 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\
\text{då}\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4 \leq 0 \quad | \ u \geq 0 \\
& x_1, x_2, x_3 = 0/1 \quad : X
\end{aligned}
$$

[Optimum: $x^* = (1,0,1)$ med $f^* = 10$.]

$X = \{0,1\}^3$ är icke-konvex $\Rightarrow$ (P) icke-konvext.

(P) maximering

$$
\begin{aligned}
L(x,u) &= 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - u(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4) = \\
&= 4u + (3-u)x_1 + (5-2u)x_2 + (7-3u)x_3
\end{aligned}
$$

(P) maximering

$$
h(u) = \max_{x \in \{0,1\}^3} L(x,u) = 4u + \max_{x_1 = 0/1} (3-u)x_1 + \max_{x_2 = 0/1} (5-2u)x_2 + \max_{x_3 = 0/1} (7-3u)x_3
$$

Separation över x_1, x_2 och x_3

Finn optimistiska skattningar av f^* genom att använda några värden på u!

$u=0$: $h(0) = 4\cdot 0 + \max_{x_1=0/1} 3x_1 + \max_{x_2=0/1} 5x_2 + \max_{x_3=0/1} 7x_3 =$

$= 0 + 3 + 5 + 7 = 15$ för $x(0) = (1,1,1)$

Alltså: $f^* \leq 15$ [obs: (P) maximering]

Är $x(0)$ tillåten? $g(x(0)) = x_1(0) + 2x_2(0) + 3x_3(0) - 4 =$

$= 1 + 2 + 3 - 4 = 2 \nleq 0 \Rightarrow$ nej!

$x(0)$ otillåten $\Rightarrow$ öka värdet på u!

$u=3$: $h(3) = 4\cdot 3 + \max_{x_1=0/1} (3-3)x_1 + \max_{x_2=0/1} (5-2\cdot 3)x_2 + \max_{x_3=0/1} (7-3\cdot 3)x_3 =$

$= 12 + \max_{x_1=0/1} 0x_1 + \max_{x_2=0/1} (-x_2)x_2 + \max_{x_3=0/1} (-2)x_3 =$

$= 12 + 0 + 0 + 0$ för $x(3) = (1,0,0)$ (tex)

Alltså: $f^* \leq 12$ (starkare!)

Är $x(3)$ tillåten? $g(x(3)) = 1 + 0 + 0 - 4 = -3 \leq 0 \Rightarrow$ ja!

Alltså: $f^* \geq f(x(3)) = 3 + 0 + 0 = 3$

$x(3)$ tillåten $\Rightarrow$ minska värdet på u!

$u=2$: $h(2) = 4\cdot 2 + \max_{x_1=0/1} x_1 + \max_{x_2=0/1} x_2 + \max_{x_3=0/1} x_3 =$

$= 8 + 1 + 1 + 1 = 11$ för $x(2) = (1,1,1)$

Alltså: $f^* \leq 11$ (ännu starkare!)

$x(2)$ otillåten $\Rightarrow$ öka värdet på u!

$\underline{\underline{u = \frac{5}{2}}}$: $h(\frac{5}{2}) = 4 \cdot \frac{5}{2} + \max_{x_1=0/1} \frac{1}{2}x_1 + \max_{x_2=0/1} 0x_2 + \max_{x_3=0/1} (-\frac{1}{2}x_3) =$

$= 10 + \frac{1}{2} + 0 + 0 = 10\frac{1}{2}$ för $x(\frac{5}{2}) = (1,1,0)$ (t ex)

Alltså: $f^* \leq 10\frac{1}{2}$ (ännu starkare!)

Är $x(\frac{5}{2})$ tillåten? $g(x(\frac{5}{2})) = 1+2+0-4 = -1 \leq 0 \Rightarrow$ ja!

Alltså: $f^* \geq f(x(\frac{5}{2})) = 3+5+0 = 8$ (starkare!)

$x(\frac{5}{2})$ tillåten $\Rightarrow$ minska värdet på u!

Och så vidare!

Slutsats av ovanstående: $8 \leq f^* \leq 10\frac{1}{2}$.

%.

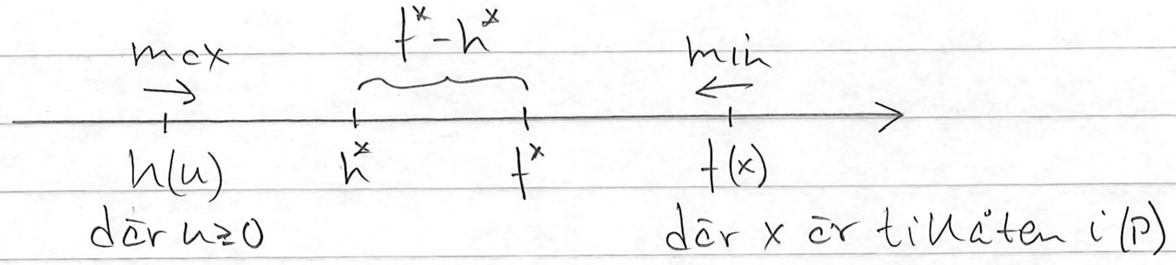
För varje $u \geq 0$ gäller $h(u) \leq f^*$, dvs att $h(u)$ ger en optimistisk skattning av f^*. Finn det $u \geq 0$ som ger en starkaste, dvs högsta, optimistiska skattning! Finn:

$$h^* = \max_{u \geq 0} h(u). \qquad (D)$$

Kallas ett <u>Lagrange-dualt problem</u>. Nu är h en <u>Lagrange-dual målfunktion</u> och u är <u>dualvariabler</u>.

<u>Följdsats</u>: $h^* \leq f^*$

<u>Bevis</u>: Välj u som ett optimum till (D). %.



$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{Följdsats}}: \ x^* \text{ tillåten i (P)} \\ u^* \geq 0 \ [\text{dvs tillåten i (D)}] \\ h(u^*) = f(x^*) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ x^* och u^* är optimala.

Exempel 2: $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ är tillåten i (P) och $u^* = 1/3 \geq 0$, samt $h(u^*) = 8/3 = f(x^*) \Rightarrow x^*$ och u^* är optimala. /.

Sats: (stark dualitet)

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ sluten, begränsad och konvex} \\ f \text{ och alla } g_i \text{ kontinuerliga och konvexa på } X \\ \text{det finns } \bar{x} \in X \text{ med } g(\bar{x}) < 0 \text{ (inre punkt)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h^* = f^*$ gäller. /.

Om (P) inte är konvext, till exempel ett heltalsproblem: $h^* < f^*$ gäller typiskt.

$f^* - h^*$ kallas dual-gap.

Exempel 1 $h^* = \max_{u \geq 0} h(u) = \max 5u(1 - u/4) = 5$ för $u^* = 2$.

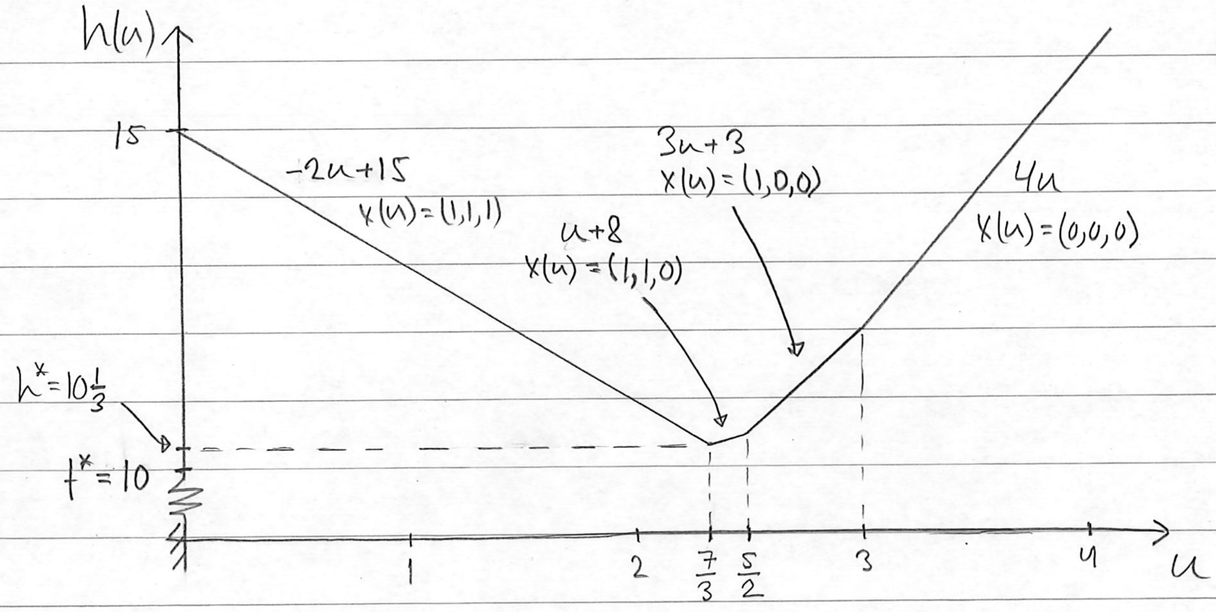
$h^* = 5 = f^*$, ty (P) konvext. %.

Exempel 2 $h^* = \min_{u \geq 0} h(u) = \min_{u \geq 0} \max\{6u, 2u+2, 3u+1, -u+3\} =$
(P) max

$= 8/3$ för $u^* = 1/3$. $h^* = 8/3 = f^*$, ty (P) konvext (ett LP-problem). %.

Exempel 3 $h(u) = 4u + \max_{x_1 = 0/1} (3-u)x_1 + \max_{x_2 = 0/1} (5-2u)x_2 + \max_{x_3 = 0/1} (7-3u)x_3 =$

$$= \begin{cases} -2u+15 & \text{då } 0 \leq u \leq \frac{7}{3} \quad [\text{för } x(u) = (1,1,1)] \\ u+8 & \text{då } \frac{7}{3} \leq u \leq \frac{5}{2} \quad [\text{för } x(u) = (1,1,0)] \\ 3u+3 & \text{då } \frac{5}{2} \leq u \leq 3 \quad [\text{för } x(u) = (1,0,0)] \\ 4u & \text{då } u \geq 3 \quad [\text{för } x(u) = (0,0,0)] \end{cases}$$



h är styckvis och konvex [ty (P) maximering]

$h^* = \min_{u \geq 0} h(u) = 10\frac{1}{3}$ för $u^* = \frac{7}{3}$
(P) max

$h^* = 10\frac{1}{3} > 10 = f^*$ ty (P) icke-konvext

dual-gap $= h^* - f^* = 10\frac{1}{3} - 10 = \frac{1}{3}$ %.