Varje linjärt optimeringsproblem kan skrivas på formen

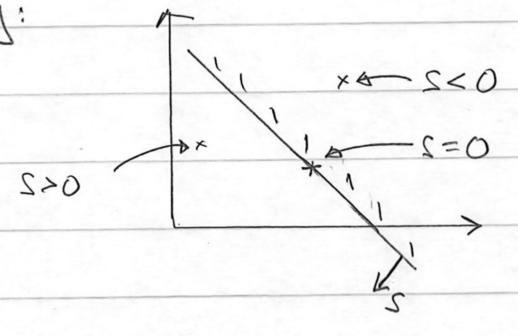
$$\begin{aligned} \min\ & z = c^T x \\ \text{då}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

där $x, c \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$ och $b \in R^m$.

n = antal variabler, m = antal likhetsvillkor
Typiskt gäller att $m < n$. Systemet $Ax = b$ är då <u>underbestämt</u>.

Användbara omskrivningar:

- $\max z \Leftrightarrow \min -z$
- $a_i^T x \leq b_i$ (ett villkor) $\Leftrightarrow a_i^T x + s = b_i$ och $s \geq 0$
  ty $s = b_i - a_i^T x \geq 0 \Leftrightarrow a_i^T x \leq b_i$
  s kallas slackvariabel
  tolkning:



- $a_i^T x \geq b_i \Leftrightarrow a_i^T x - s = b_i$ och $s \geq 0$
- $x_j \leq 0 \Leftrightarrow x_j^{ny} = -x_j \geq 0$
- x_j ej teckenbegränsad (fri) $\Leftrightarrow x_j = x_j^+ - x_j^-$ där $x_j^+, x_j^- \geq 0$
- $x_j \geq l_j \ (\neq 0) \Leftrightarrow x_j^{ny} = x_j - l_j \geq 0$
- $x_j \leq u_j \ (\neq 0) \Leftrightarrow x_j^{ny} = u_j - x_j \geq 0$

Exempel

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 1 \end{array}$$

$x_1^{ny} = -x_1$ och $x_2^{ny} = x_2 - 1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{lrcll} \max & x_1^{ny} & + & x_2^{ny} + 1 & \\ \text{då} & -x_1^{ny} & + & x_2^{ny} & \geq 2-1 \\ & x_1^{ny} & + & 2x_2^{ny} & \leq 6-2 \\ & x_1^{ny} & , & x_2^{ny} & \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & -x_1^{ny} - x_2^{ny}(-1) \\ \text{då} & -x_1^{ny} + x_2^{ny} - s_1 = 1 \\ & x_1^{ny} + 2x_2^{ny} + s_2 = 4 \\ & x_1^{ny},\ x_2^{ny},\ s_1,\ s_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & (-1,-1,0,0)\, x \\ \text{då} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

där $x = (x_1^{ny}, x_2^{ny}, s_1, s_2)^T$.

Sats: Om problemet

$$\min z = c^T x$$
$$\text{då } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

har en tillåten lösning och begränsat optimalvärde (dvs $z^* > -\infty$) så antas detta i (minst) en hörnpunkt till mängden av tillåtna lösningar. //

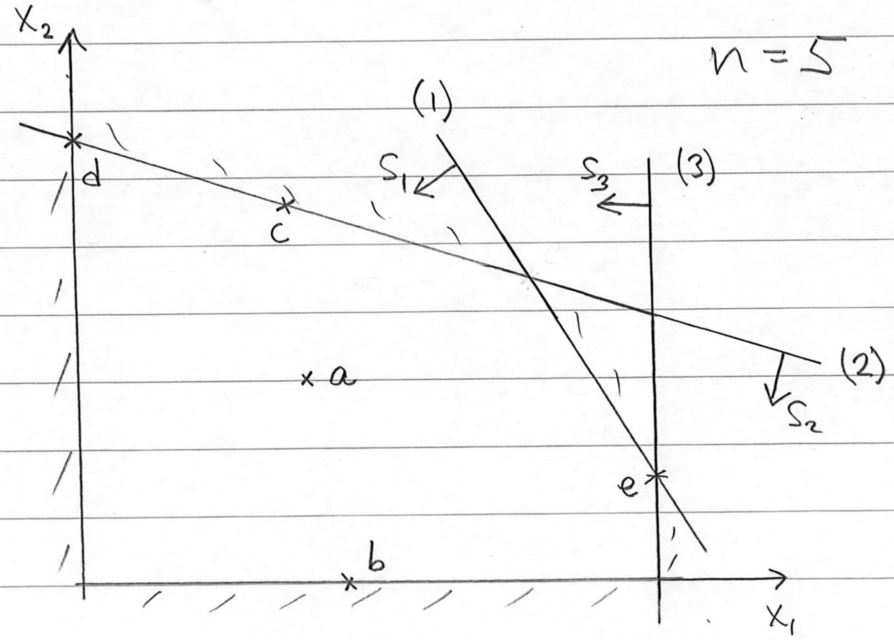
Vad är den algebraiska motsvarigheten till en hörnpunkt i det tillåtna området?

Exempel: (samma)

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 \iff \max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{då} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 + 3x_2 \leq 13 & (2) \\ x_1 \leq 5 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{då} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 13 \\ x_1 + s_3 = 5 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

$n = 5$ och $m = 3$



a: $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 > 0$ ingen noll
b: $x_1, s_1, s_2, s_3 > 0$ och $x_2 = 0$ en noll
c: $x_1, x_2, s_1, s_3 > 0$ och $s_2 = 0$ en noll
d: $x_2, s_1, s_3 > 0$ och $x_1 = s_2 = 0$ två noll
e: $x_1, x_2, s_2 > 0$ och $s_1 = s_3 = 0$ två noll

I hörnpunkterna d och e är två variabler noll och i andra punkter är det färre!

Observation: $2 = 5 - 3 = n - m$

Definition: En lösning till $Ax = b$ är en baslösning om den kan erhållas genom att sätta $n-m$ variabler till noll och värdena på de resterande variablerna då blir unikt bestämda.

Definition: En baslösning är tillåten om den uppfyller att $x \geq 0$.

De $n-m$ variabler som sätts till noll kallas icke-basvaribler.
De resterande m variablerna kallas basvariabler.

Definition: En baslösning är degenererad om någon basvariabel har värdet noll.

Sats: Ett $\bar{x}$ är en hörnpunkt till mängden $\{x \mid Ax = b \text{ och } x \geq 0\}$ omm $\bar{x}$ är en tillåten baslösning till systemet $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$

Följdsats: Om problemet

$$\begin{aligned} \min\ & z = c^T x \\ \text{då } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

har en tillåten lösning och begränsat optimalvärde (dvs $z^* > -\infty$) så antas detta i (minst) en tillåten baslösning.

Exempel: Bivillkorssystem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (1) \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 & (2) \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 3 & (3) \\ x_1 - x_2 + x_6 = 1 & (4) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

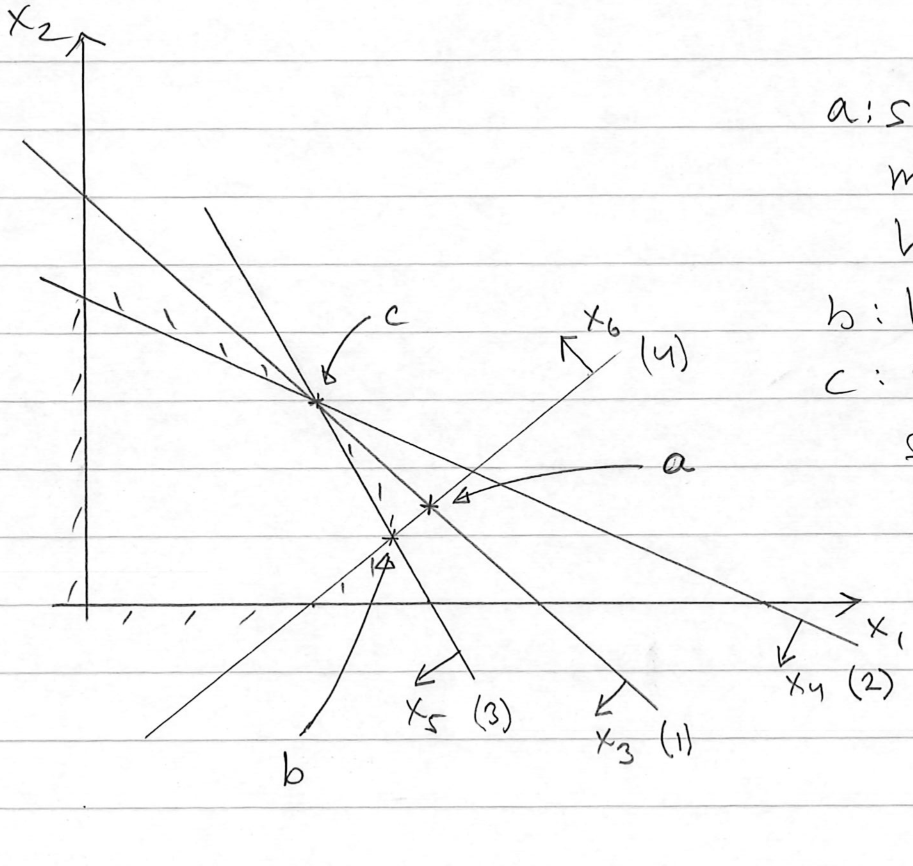
där x_3, x_4, x_5 och x_6 kan tolkas som slackvariabler.

$n = 6$ och $m = 4$ $\Rightarrow$ baslösningar fås genom att $n - m = 6 - 4 = 2$ icke-basvariabler sätt till noll

a) icke-basvariabler: $x_3 = x_6 = 0$
basvariabler: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = -\frac{1}{2}$
baslösning!
$x_5 = -\frac{1}{2} \not\geq 0$ $\Rightarrow$ otillåten baslösning!

b) icke-basvariabler: $x_5 = x_6 = 0$
basvariabler: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_4 = 1$
baslösning!
$x \geq 0$ gäller $\Rightarrow$ tillåten baslösning!

c) icke-basvariabler: $x_3 = x_4 = 0$
basvariabler: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$
baslösning!
$x \geq 0$ gäller $\Rightarrow$ tillåten baslösning!
basvariabeln $x_5 = 0$ $\Rightarrow$ degenererad!



a: skärningspunkt men <u>inte</u> en hörnpunkt
b: hörnpunkt
c: hörnpunkt som är överbestämd

%.

Alltså:

- tillåten baslösning ⇔ hörnpunkt
- otillåten baslösning ⇔ skärningspunkt mellan villkor (inklusive $x_j \geq 0$) som inte är tillåten
- degeneration ⇔ en skärningspunkt är överbestämd

Optimum fås i en tillåten baslösning.
Hur många finns att välja på?

antalet baslösningar $\sim \binom{n}{m}$

Växer fort med problemstorlek!
Uppräkning praktiskt omöjligt på stora problem!

Hur avsöka tillåtna baslösningar effektivt för att snabbare finna en optimal tillåten baslösning?