Algebraisk linjär optimering

$$(LP)\quad \begin{aligned} \min\ & z = c^T x \\ \text{då}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

där $x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $b \in \mathbb{R}^m$.

Låt $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ där alla $A_j \in \mathbb{R}^m$
och $c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ där alla $c_j \in \mathbb{R}$.

Antag att en tillåten baslösning (dvs hörnpunkt) är känd, med basvariabler $x_1, x_2, \ldots, x_m$ och icke-basvariabler $x_{m+1}, \ldots, x_n$. (Kan alltid åstadkommas mha en omnumrering av variablerna!)

Inför:
$$\begin{aligned} x_B &= (x_1, \ldots, x_m)^T \\ x_N &= (x_{m+1}, \ldots, x_n)^T \\ c_B &= (c_1, \ldots, c_m)^T \\ c_N &= (c_{m+1}, \ldots, c_n)^T \\ B &= (A_1, \ldots, A_m) \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ N &= (A_{m+1}, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \end{aligned}$$

Alltså: $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ och $A = (B, N)$.

Sätt in i LP!

$$\min z = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\text{då: } (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \min z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

$$\text{då: } Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B, \quad x_N \geq 0$$

(partitionering av LP)

Men $Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ m \times m \text{ enhetsmatris}}}{I} x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$

(B^{-1} finns eftersom vi utgick från en tillåten baslösning)

Vidare: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N =$
$= c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$

Alltså är LP ekvivalent med

$$\min z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$\text{då: } Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B, \quad x_N \geq 0.$$

Problemet är uttryckt i en bas som svarar mot en tillåten baslösning.

Den tillåtna baslösningen ges av $x_B = B^{-1}b$ och $x_N = 0$, med $z = c_B^T B^{-1} b$.

Obs: $B^{-1}b \geq 0$ gäller, ty tillåten baslösning

$z = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B + c_N^T x_N$ där $x_B = B^{-1}b$ och $x_N = 0$

Om $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ gäller så fås att

$$z = c_B^T B^{-1} b + \underbrace{(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)}_{\geq 0} \underbrace{x_N}_{\geq 0} \geq c_B^T B^{-1} b \text{ för alla } x_N \geq 0,$$

varför $x_N^* = 0$ och $x_B^* = B^{-1}b$, med $z^* = c_B^T B^{-1} b$.

Alltså kan optimalitet detekteras!

Om $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \ngeq 0$ inte gäller: möjligt att relativt enkelt beräkna en bättre tillåten baslösning.

Storheterna $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ kallas reducerade kostnader. Skrivs ofta som $\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T N$ där $y^T = c_B^T B^{-1}$!

[För maximeringsproblem: optimum om $\bar{c}_N^T \leq 0$ gäller.]