

Exempel: $\min z = -x_1 - 2x_2$

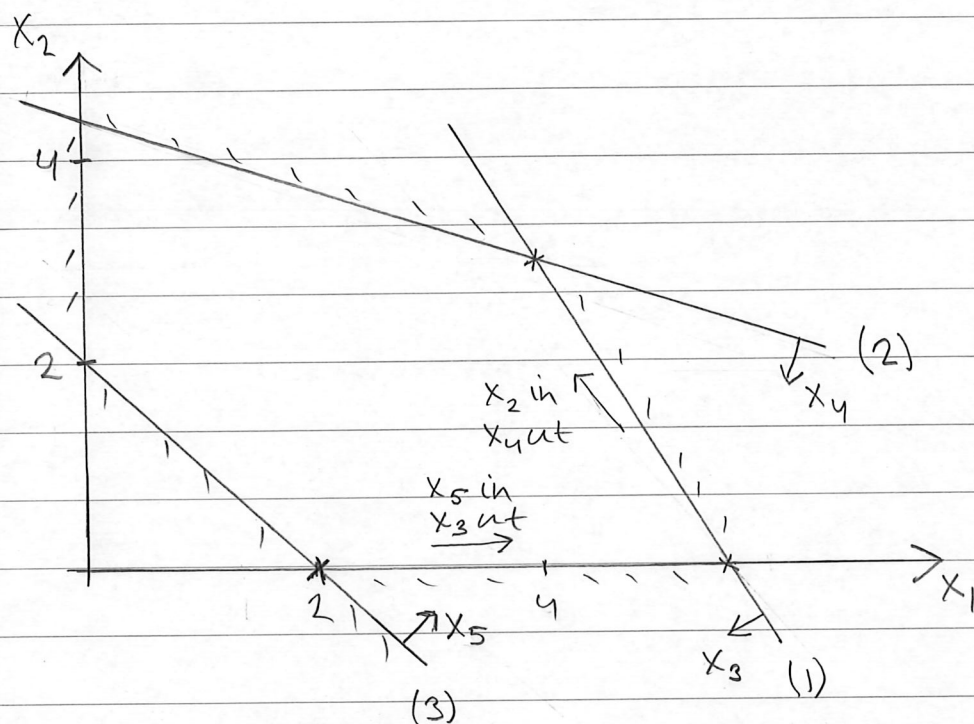
$$\text{där} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 13 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 2 & (3) \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

där x_3, x_4 och x_5 kan tolkas som slackvariabler,



hörn punkt: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ med $z = -2$

motsvarande tillåtna baslösning:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ med } z = -2$$

Uttryck problemet i denna bas!

Villkoren kan skrivas som:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$B \quad x_B + N \quad x_N = b$$

Multiplitera med $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$I \quad x_B + B^{-1}N \quad x_N = B^{-1}b$$

Målfunktionen kan skrivas som

$$z = (-1, 0, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + (-2, 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$c_B^T \quad x_B + c_N^T \quad x_N$$

$$= (-1, 0, 0) \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \right] + (-2, 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \left[(-2, 0) - (-1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$c_B^T \quad B^{-1}b + [c_N^T - c_B^T \quad B^{-1}N] \quad x_N$$

$$= -2 + (-1, -1) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T B^{-1}b + \bar{c}_N^T \quad x_N$$

Alltså: $\min z = -2 - x_2 - x_5$

$$\text{då } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\ -x_2 + x_3 + 2x_5 = 7 \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Optimum? Nej, ty $\bar{c}_j \neq 0$.

z minskar om x_2 eller x_5 ökar (från noll)!

Välj en, tex x_5 (och behåll $x_2 = 0$).

[Otte väljs enligt min $\bar{c}_j$.]

Kallas inkommande basvariabel.

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2 - x_5 \\ x_1 = 2 + x_5 \geq 0 \\ x_3 = 7 - 2x_5 \geq 0 \Rightarrow x_5 \leq \frac{7}{2} \\ x_4 = 11 - x_5 \geq 0 \Rightarrow x_5 \leq \frac{11}{1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \min z}}{x_5} = \min \left\{ \frac{7}{2}, \frac{11}{1} \right\} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_3 = 0$$

x_3 blev utgående basvariabel.

Ny tilläta baslösning:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 7/2 \\ 15/2 \end{pmatrix} \text{ och } x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ med } z = -11/2$$

Är denna optimal?

Uttryck problemet i nya basen!
Kan göras mha redoperationer.

$$\begin{array}{l} \text{in} \\ \downarrow \\ \text{ut} \leftarrow \begin{cases} -z & -x_2 & -x_5 = 2 \\ & x_1 + x_2 & -x_5 = 2 \\ & -x_2 + x_3 & +2x_5 = 7 \\ & 2x_2 & +x_4 + x_5 = 11 \end{cases} \end{array}$$

$\begin{matrix} \nearrow \times \frac{1}{2} \\ \searrow \times (-\frac{1}{2}) \end{matrix}$

$$\begin{cases} -z & -\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & = \frac{11}{2} \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & = \frac{11}{2} \\ & -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & +x_5 = \frac{7}{2} \\ & \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 & = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$z = -\frac{11}{2} - \underbrace{\frac{3}{2}x_2}_{<0} + \frac{1}{2}x_3 \Rightarrow \text{inte optimum!}$$

Låt x_2 vara inkommande basvariabel!

Ofta görs handräkningarna istället i en tabla.

			in ↓					
bas	-z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde	
-z	1		$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{11}{2}$	
x_1		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{11}{2}$	
x_5			$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{7}{2}$	
ut ← x_4			$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1		$\frac{15}{2}$	

$\begin{matrix} \nearrow \times \frac{3}{5} \\ \searrow \times (-\frac{1}{5}) \end{matrix}$

$$\min \left\{ \frac{11/2}{1/2}, \frac{15/2}{5/2} \right\} = \frac{15/2}{5/2} \Rightarrow x_4 \text{ utgående basvariabel}$$

bas	-z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	värde
-z	1			$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$		10
x ₁		1		$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$		4
x ₅				$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	5
x ₂			1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$		3

$$\left. \begin{array}{l} \bar{c}_3 = \frac{1}{5} \geq 0 \\ \bar{c}_4 = \frac{3}{5} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{optimum!}$$

Alltså: $x_1^* = 4$ och $x_2^* = 3$, med $z^* = -10$ ✓

Detta kallas simplexmetoden.