Dualitet inom linjär optimering

Linjära optimeringsproblem förekommer i par, kallade primal-dual-par.

primal	dual
$z^* = \max z = c^T x$	$v^* = \min v = b^T y$
(P) då $Ax \leq b \quad \| y$	(D) då $A^T y \geq c \quad \| x$
$x \geq 0$	$y \geq 0$
n varibler	m variabler
m bivillkor	n bivillkor

Obs: samma data, A, b och c, i båda problemen.

Obs: primala variabler $\Leftrightarrow$ duala villkor
primala villkor $\Leftrightarrow$ duala variabler

y kallas dualvariabler

Oviktigt vilket problem som är primal respektive dual. Ofta: primal = det givna problemet.

Om primalen har annan form så förändras även dualen. Kan härledas från standardparet!

<u>Exempel</u>: $\max z = c^T x$

(P) då $Ax = b \quad | \, y$

$x \geq 0$

(P) $\Leftrightarrow$ $\max z = c^T x$ $\Leftrightarrow$ $\max z = c^T x$

då $Ax \leq b$ — då $Ax \leq b \quad | \, y^+$

$Ax \geq b$ — $-Ax \leq -b \quad | \, y^-$

$x \geq 0$ — $x \geq 0$

Dual: $\min v = b^T y^+ - b^T y^-$ $\Leftrightarrow$ $\min v = b^T y$

då $A^T y^+ - A^T y^- \geq c$ — (D) då $A^T y \geq c \quad | \, x$

$y^+, y^- \geq 0$ — y fri

Obs: samma data i (P) och (D)!

Alltså: likhetsvillkor $\Rightarrow$ fria dualvariabler

%

Relationer mellan problemen:

<u>ena</u> problemet:	<u>andra</u> problemet:
maximering	minimering
villkor $\leq$	variabel ≥ 0
—"— $=$	—"— fri
—"— $\geq$	—"— ≤ 0
variabel ≥ 0	villkor $\geq$
—"— fri	—"— $=$
—"— ≤ 0	—"— $\leq$

Obs: dualen till dualen = primalen!

Exempel: $\min z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$

då
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_3 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 0 \\ y_2 \text{ fri} \end{array}$$

Dual: $\max v = 5y_1 + 7y_2$

då
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ 4y_1 + y_2 \leq 2 \\ -2y_1 - y_2 \geq -3 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \text{ fri} \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \leq 0 \end{array}$$

//.

Samband mellan problemen?

Standard-paret:

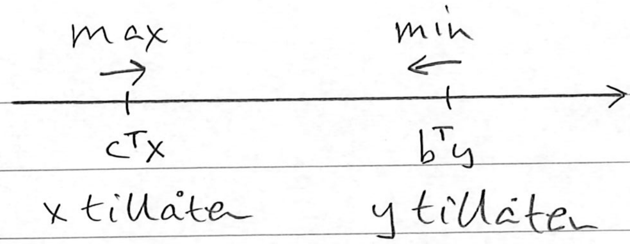
$$(P) \quad \begin{array}{l} z^* = \max z = c^T x \\ \text{då } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{l} v^* = \min v = b^T y \\ \text{då } A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{array}$$

Svag dualitet:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} \text{ tillåten i } (P) \\ \bar{y} \text{ tillåten i } (D) \end{array} \right\} \Rightarrow c^T \bar{x} \leq b^T \bar{y}$$

Bevis: $c^T \bar{x} \underset{\substack{A^T y \geq c \\ x \geq 0}}{\leq} (A^T \bar{y})^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \underset{\substack{A\bar{x} \leq b \\ \bar{y} \geq 0}}{\leq} \bar{y}^T b \underset{\text{skalär}}{=} (\bar{y}^T b)^T = b^T \bar{y}$

//.



Följdsats:

$\bar{x}$ tillåten i (P) $\Rightarrow$ $v^* \geq c^T \bar{x}$

$\bar{y}$ tillåten i (D) $\Rightarrow$ $z^* \leq b^T \bar{y}$

Exempel: $z^* = \max\ z = 9x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 11x_4$

$$
(P)\quad \begin{array}{rl|l}
\text{då} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 & y_1 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 22 & y_2 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dual: $v^* = \min\ v = 12y_1 + 22y_2$

$$
(D)\quad \text{då} \left\{ \begin{array}{l|l}
2y_1 + 3y_2 \geq 9 & x_1 \\
3y_1 + 4y_2 \geq 12 & x_2 \\
4y_1 + y_2 \geq 6 & x_3 \\
y_1 + 5y_2 \geq 11 & x_4
\end{array} \right.
$$

En tillåten duallösning: $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 2$.

Alltså: $z^* \leq 12 \cdot 2 + 22 \cdot 2 = 68$

Följdsats: Om både (P) och (D) har tillåtna lösningar så har både (P) och (D) begränsade optimalvärden (dvs $z^* < +\infty$ och $v^* > -\infty$).

Följdsats:

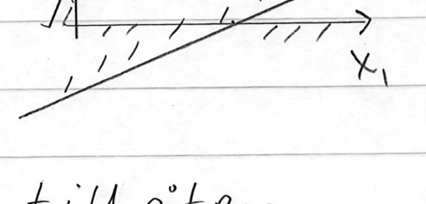
$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} \text{ tillåten i (P)} \\ \bar{y} \text{ tillåten i (D)} \\ c^T\bar{x} = b^T\bar{y}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} \text{ och } \bar{y} \text{ optimala}$$

Följdsats: Om ena problemet har obegränsat optimum så saknar det andra problemet tillåten lösning.

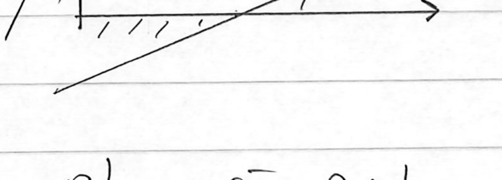
Exempel:

$$\text{(P)} \quad \min z = x_1 + x_2 \quad \text{då} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{(D)} \quad \max v = y_1 + 2y_2 \quad \text{då} \begin{cases} -2y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 - 2y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$



tillåten lösning saknas



obegränsat optimum

./.

Obs: Det kan inträffa att båda problemen saknar tillåten lösning.