

Sats: Om simplexmetoden på problemet

$$z^* = \max z = c^T x$$
$$\text{då } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

ger optimum i $x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ så är

$y^* = (c_B^T B^{-1})^T$ optimal i dualen

$$v^* = \min v = b^T y$$
$$\text{då } A^T y \geq c$$

och $v^* = z^*$ gäller.

Bevis: Optimal partitionering:

$$z^* = \max z = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\text{då } (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \quad | \quad y$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \geq 0.$$

Partitionerad dual:

$$v^* = \min v = b^T y$$

$$\text{då } (B, N)^T y \geq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow V^* = \min U = b^T y$$

$$\text{då: } \begin{array}{l|l} B^T y \geq c_B & x_B \\ N^T y \geq c_N & x_N \end{array}$$

Da gäller:

$$(i) \quad B^T y^* = B^T (c_B^T B^{-1})^T = B^T B^{-T} c_B = c_B$$

(ii) Optimalitet i simplexmetoden

$$\Rightarrow c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0 \Rightarrow y^{*T} N \geq c_N \Rightarrow N^T y^* \geq c_N$$

(i) och (ii) $\Rightarrow y^*$ tillåten i dualen

$$\text{Vidare: } b^T y^* = y^{*T} b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B^* + c_N^T x_N^* = c^T x^*$$

$$\left. \begin{array}{l} x^* \text{ tillåten} \\ y^* \text{ tillåten} \\ c^T x^* = b^T y^* \end{array} \right\} \Rightarrow y^* \text{ optimal}$$

$$\text{Slutligen: } \underset{\substack{\uparrow \\ y^* \text{ optimal}}}{V^*} = \underset{\substack{\uparrow \\ x^* \text{ optimal}}}{b^T y^*} = \underset{\substack{\uparrow \\ x^* \text{ optimal}}}{c^T x^*} = z^*$$

%.
/.

Obs: $y^* = (c_B^T B^{-1})^T$ gäller även för minimeringsproblem.

Exempel: $z^* = \max z = 7x_1 + 4x_2 + x_3$

$$\text{då } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \end{array}$$

Optimal baslösning:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_N^* = \begin{pmatrix} x_3^* \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z^* = 25$$

Dual: $v^* = \min v = 5y_1 + 10y_2$

$$\text{då } \begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 7 \\ 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} x_1 & (1) \\ x_2 & (2) \\ x_3 & (3) \end{array}$$

Dualt optimum:

$$\begin{aligned} y^* &= (c_B^T B^{-1})^T = \left[(7, 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right] = \left[(7, 4) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right]^T = \\ &= \frac{1}{5} (5, 10)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[Kontroll: y^* uppfyller (1), (2), (3)
och ger $v = 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 25 = z^*$.]