

Betrakta åter standard-primal-dual-paret.

Följdsats: Om (P) eller (D) har begränsat optimum så gäller detta för både problemen och $z^* = v^*$.

Bevis: Använd simplexmetoden på det problem som har begränsat optimum och tillämpa satsen.

Stark dualitet: Låt x^* och y^* vara tillåtna i (P) respektive (D). Då är x^* och y^* optimala om $c^T x^* = b^T y^*$.

Bevis:

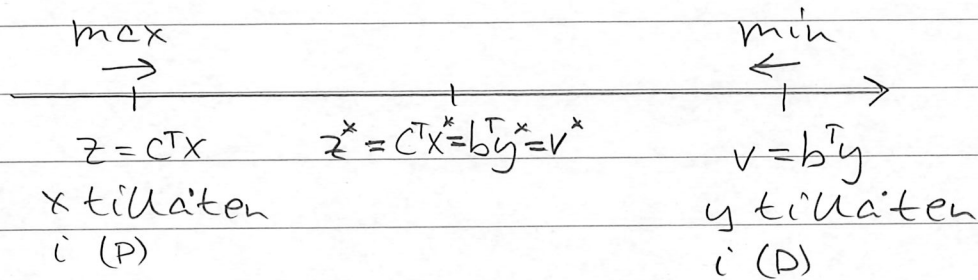
$\Rightarrow$: Både problemen har tillåtna lösningar $\Rightarrow$ både problemen har begränsade optima. Därför:

$$\begin{array}{ccccc} c^T x^* & = & z^* & = & v^* & = & b^T y^* \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ x^* \text{ optimal} & & \text{följdsats} & & y^* \text{ optimal} & & \\ & & \text{ovan} & & & & \end{array}$$

$\Leftarrow$: $\left. \begin{array}{l} x^* \text{ tillåten} \\ y^* \text{ tillåten} \\ c^T x^* = b^T y^* \end{array} \right\} \Rightarrow x^* \text{ och } y^* \text{ optimala}$

o/a

Summering:



Hittills: målfunktionsvärden.

Men även optimallösningar till (P) och (D) är relaterade.

Sats: [optimalitetsvillkor för (P)]

Givet ett x^* som är tillåtet i (P).
Då är x^* optimal om det finns
ett y^* som är tillåtet i (D)
sådant att

$$\begin{cases} y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \\ x^{*T}(A^T y^* - c) = 0. \end{cases}$$

Bevis:

$\Rightarrow$: Stark dualitet $\Rightarrow$ (D) har en
optimallösning, y^* , och $z^* = v^*$.

Då fås:

$$\begin{array}{ccccccc} z^* = c^T x^* & \leq & (A^T y^*)^T x^* & = & y^{*T} A x^* & \leq & y^{*T} b = b^T y^* = v^* = z^* \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ x^* \text{ opt.} & & A^T y^* \geq c & & A x^* \leq b & & y^* \text{ opt.} \\ & & x^* \geq 0 & & y^* \geq 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ likhet gäller överallt

$$\Rightarrow \begin{cases} y^{*T} A x^* = y^{*T} b \\ c^T x^* = (A^T y^*)^T x^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{*T} (b - A x^*) = 0 \\ x^{*T} (A^T y^* - c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow : \begin{cases} y^{*T} (b - A x^*) = 0 \\ x^{*T} (A^T y^* - c) = 0 \end{cases} \Rightarrow c^T x^* = b^T y^*$$

$$\left. \begin{array}{l} x^* \text{ tillåten} \\ y^* \text{ tillåten} \\ c^T x^* = b^T y^* \end{array} \right\} \Rightarrow x^* \text{ optimal} \quad \%$$

Med $A = (A_1, \dots, A_j, \dots, A_n)$ där A_j är j:te kolumnen i A

$$x^{*T} (A^T y^* - c) = \sum_{j=1}^n \underbrace{x_j^*}_{\geq 0} \underbrace{(A_j^T y^* - c_j)}_{\geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_j^* (A_j^T y^* - c_j) = 0 \text{ för } j=1, \dots, n.$$

Med $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ där analogt att

$$y^{*T} (b - A x^*) = 0 \Leftrightarrow y_i^* (b_i - a_i^T x^*) = 0 \text{ för } i=1, \dots, m.$$

[Förutsatt att x^* och y^* är tillåtna.]

Kallas komplementvillkor.

Ger relationer mellan primala och duala optima.

Exempel: $z^* = \min z = 18x_1 + 15x_2 + 16x_3$

$$\text{dä} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}$$

Är $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0)$ optimal?

Dual: $v^* = \max v = 9y_1 + 12y_2$

$$\text{dä} \begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \leq 18 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 15 \\ 4y_1 + 2y_2 \leq 16 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 & (1) \\ x_2 & (2) \\ x_3 & (3) \\ & (4) \end{matrix}$$

Använd komplementvillkoren för att finna en duallösning. Undersök därefter om den är tillåten.

Komplementvillkor:

$$y_1^* (4x_1^* + 2x_2^* + 4x_3^* - 9) = 0 \quad \text{ger inget, ty } (\dots) = 0$$

$$y_2^* (3x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* - 12) = 0 \quad \text{---"---}$$

$$x_1^* (18 - 4y_1^* - 3y_2^*) = 0 \Rightarrow 4y_1^* + 3y_2^* = 18, \text{ ty } x_1^* > 0$$

$$x_2^* (15 - 2y_1^* - 3y_2^*) = 0 \Rightarrow 2y_1^* + 3y_2^* = 15, \text{ ty } x_2^* > 0$$

$$x_3^* (16 - 4y_1^* - 2y_2^*) = 0 \quad \text{ger inget, ty } x_3^* = 0$$

$$\begin{cases} 4y_1^* + 3y_2^* = 18 \\ 2y_1^* + 3y_2^* = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = \frac{3}{2} \\ y_2^* = 4 \end{cases}$$

y^* uppfyller (1), (2), (3) och (4)

$\Rightarrow x^*$ optimal!

✓