

Känslighetsanalys

$$z^* = \max z = c^T x$$

da: $Ax = b \quad | y$
 $x \geq 0$

Problemet beskrivet i en optimalbas:

$$z^* = \max z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$\text{da: } I x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

$$x_B, \quad x_N \geq 0$$

$$\text{Optimum: } x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ med } z^* = c_B^T B^{-1} b$$

$$\text{Dualt optimum: } y^* = (c_B^T B^{-1})^T$$

$$\text{Reducerade kostnader: } \bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - y^{*T} N$$

På komponentform:

$$(\bar{c}_{m+1}, \dots, \bar{c}_n) = (c_{m+1}, \dots, c_n) - y^{*T} (A_{m+1}, \dots, A_n)$$

$$= (c_{m+1} - y^{*T} A_{m+1}, \dots, c_n - y^{*T} A_n)$$

$$\text{Alltså: } \bar{c}_j = c_j - y^{*T} A_j, \quad j = m+1, \dots, n$$

c_j = ursprunglig kostnadskoeficient

A_j = ursprunglig bi-värde kolumn

Värdet av förändringar i b

Hur ändras z^* om b ändras lite?

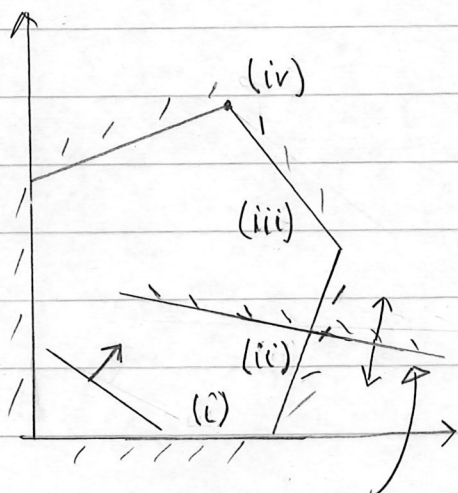
Betrakta z^* som en funktion av b ,
dvs $z^* = z^*(b)$.

$$\text{Men } z^*(b) = c_B^T B^{-1} b = y^{*T} b = \sum_{i=1}^m y_i^* b_i$$

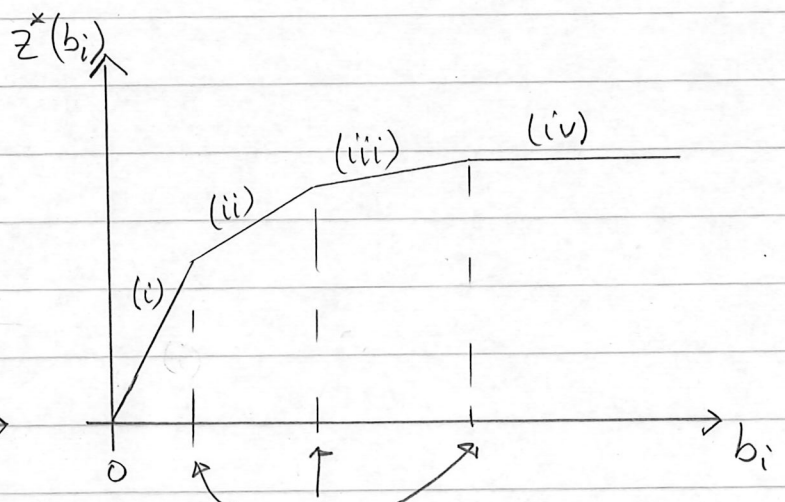
$$\Rightarrow \frac{\partial z^*(b)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i=1, \dots, m.$$

Dualvariabelvärdet y_i^* är alltså
det marginella värdet (map z^*) av
en förändring av b_i . Kallas därför
ibland skuggpris.

Observera att $y^* = (c_B^T B^{-1})^T$ beror
av optimalbasen. Om b ändras
så mycket att optimalbasen ändras
(dvs en annan hörnpunkt blir optimal)
så ändras y^* .



bivillkor
som flyttas



byte av optimalbas
(dvs hörnpunkt)

Tillåtna förändringar i b

För vilka b fås samma optimalbas,
och därmed samma skuggspriser?

Låt $b^{ny} = b + \Delta b$, där Δb är en störning.

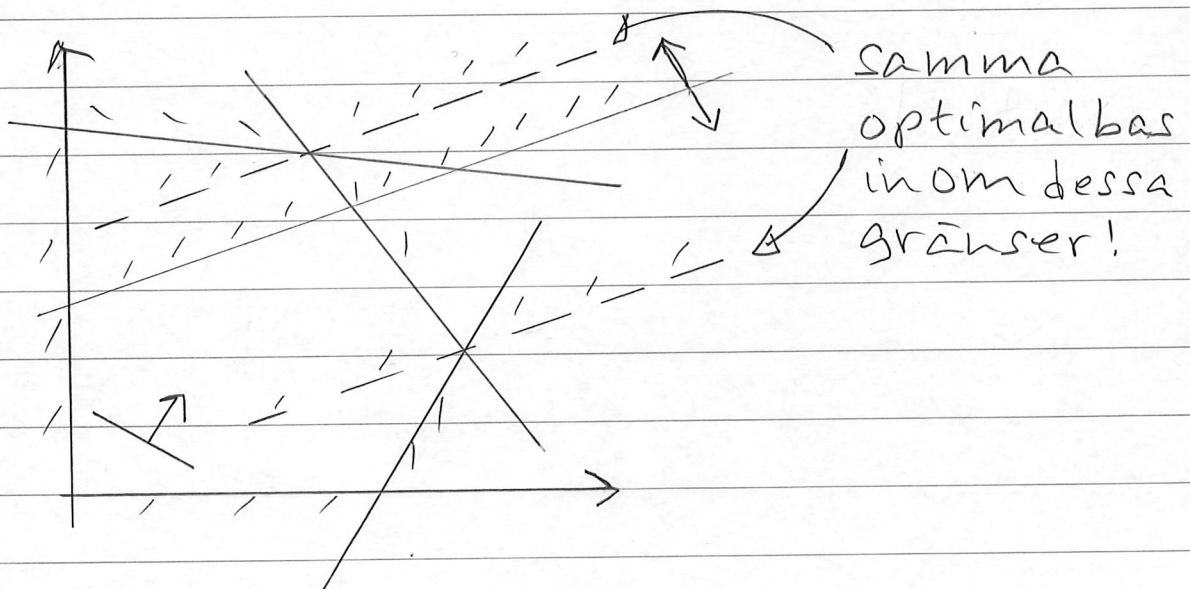
Da fås: $x_B^{*ny} = B^{-1}b^{ny} = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = x_B^* + B^{-1}\Delta b$

Optimalbasen är oförändrad om

$x_B^{*ny} \geq 0$ gäller, dvs om Δb uppfyller

$$B^{-1}\Delta b \geq -x_B^*.$$

Oftast studeras endast ett högerled.



Ny variabel

Efter att problemet lösts tillkommer en ny variabel, x_{n+1} , med målfunktionskoefficient c_{n+1} och bivillkorskolumn A_{n+1} .

$x_{n+1} = 0$ och icke-basisk!

Beräkna $\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - y^{*T} A_{n+1}$.

$\bar{c}_{n+1} \leq 0 \Rightarrow$ oförändrad optimalbas och $x_{n+1}^* = 0$

$\bar{c}_{n+1} > 0 \Rightarrow x_{n+1}$ blir inkommande och ett ny optimalbas får

Bivillkorskolumnens utseende i den aktuella basen?

$$Ax + A_{n+1}x_{n+1} = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N + A_{n+1}x_{n+1} = b$$

$$\Leftrightarrow Ix_B + \underline{B^{-1}Nx_N + B^{-1}A_{n+1}x_{n+1}} = B^{-1}b$$

x_{n+1} har alltså bivillkorskoefficienter

$\bar{A}_{n+1} = B^{-1}A_{n+1}$ i tablan!

Finns utgående basvariabel och reoptimera problemet!

Exempel $\max z = 3x_1 + x_2 - x_3$

$$\text{då } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 & y_1 & (1) \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 & y_2 & (2) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

In för slackvariabler $x_4, x_5 \geq 0$.

Optimaltable:

bas	-z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	värde
-z	1			-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-9
x_1		1		-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
x_2			1	3	2	-1	6

a) Skuggpriser för villkoren?

$$y^* = (c_B^T B^{-1})^T = [(3, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}]^T = [(3, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 2 \end{pmatrix}]^T = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

b) För vilka högerled i villkor (2) är skuggpriset $y_2^* = \frac{1}{2}$ giltigt?

Låt $b^{ny} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix}$. Då fås $x_B^{ny} = B^{-1}b^{ny} =$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}}_{= x_B^*} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Delta b_2 \\ 2\Delta b_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta b_2 \geq -1 \\ -\Delta b_2 \geq -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 \leq \Delta b_2 \leq 6 \Rightarrow 8 \leq 10 + \Delta b_2 \leq 16 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ skuggpriset giltigt för högerled från 8 till 16

c) Antag att en ny variabel, x_6 , med $c_6 = 2$ och $A_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ adderas. Får ett annat optimum?

$$\bar{c}_6 = c_6 - y^* A_6 = 2 - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

$\Rightarrow x_6$ blir inkommande

Uppdaterad bivillkorsskolumn:

$$\bar{A}_6 = B^{-1} A_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

	bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	värde
	$-z$	1			-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-9
	x_1		1		-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$\leftarrow$	x_2			1	3	2	-1	③	6

x_2 utgående

	bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	värde
	$-z$	1		$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	-10
	x_1		1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	2
	x_6			$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	2

Nytt optimum: $x_1^* = x_6^* = 2$, $x_2^* = x_3^* = 0 \Rightarrow z^* = 10$