Nätverksoptimering

Optimeringsproblem över nätverk (grafer). Utgör en form av grafisk modell. Finns många sorter. Här bara:

- billigaste (kortaste) väg
- minimalträd (billigaste uppspännande träd)

Nätverk består av noder och bågar.

nod: i

riktad båge: $i \longrightarrow j$ båge (i,j)

oriktad båge: i — j båge (i,j) $\Leftrightarrow$ båge (j,i)

Vissa problemtyper innehåller riktade bågar medan andra innehåller oriktade. (Ovanligt med blandningar.)

Ofta har noder och bågar konkreta tolkningar (tex städer och vägar), men ibland beskriver de istället mer abstrakta objekt.

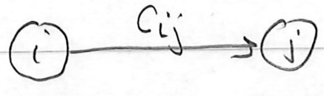
Billigaste väg

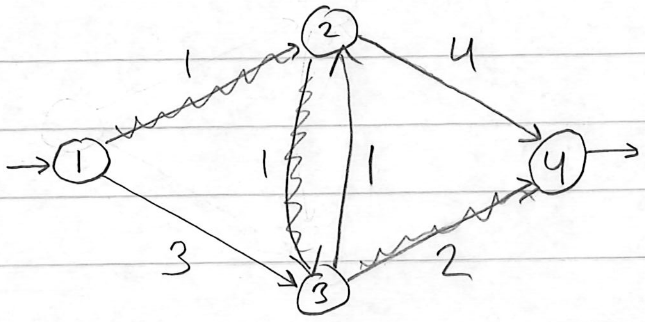
Givet: Ett riktat nätverk med m noder och kostnader på bågarna.

Sökt: En billigaste (kortaste) väg (bv) från nod 1 till nod m.

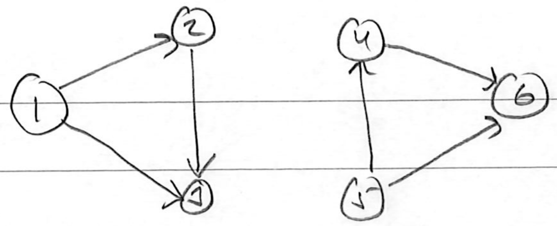
Ibland söks billigaste vägar från nod 1 till alla andra noder. Kallas ett billigaste-väg-träd (bv-träd).

väg = sammanhängande sekvens av bågar
vägkostnad = summa av bågkostnader längs vägen



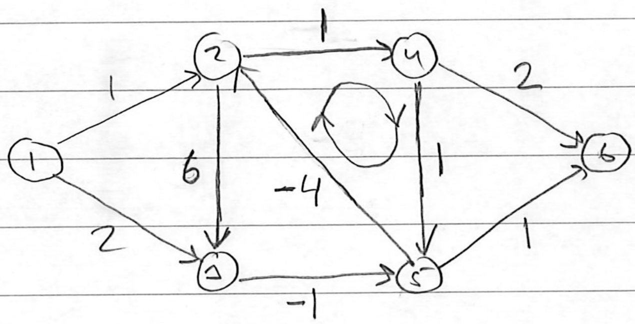


~~~ : bv
(här även ett bv-träd)

En tolkning: skicka något så billigt som möjligt från nod 1 till nod m.

När är problemet välställt?

Det ska finnas en tillåten lösning: det ska finnas (minst) en väg från nod 1 till nod m.
~~~



finns ingen väg från nod 1 till nod 6!

Optimum ska vara begränsat: det får inte finnas en uppnåelig cykel med negativ kostnad.



cykeln 2-4-5-2 har kostnad $1+1-4=-2$ och kommer att genomlöpas oändligt många gånger

obegränsat optimum!

Matematisk modellering?

Val av bågar: logiska beslut!

Variabler: $x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ om båge } (i,j) \text{ ingår i vägen} \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$

Modell: $\min\ x_{12}+3x_{13}+x_{23}+4x_{24}+x_{32}+2x_{34}$

då $\begin{cases} x_{12}+x_{13}=1 \\ x_{23}+x_{24}=x_{12}+x_{32} \\ x_{32}+x_{34}=x_{13}+x_{23} \\ x_{24}+x_{34}=1 \\ x_{ij}=0/1,\ \forall (i,j) \end{cases}$

Obs: ett 0/1-problem!

Obs: Ett villkor för varje nod. Om vägen passerar noden så gäller att VL = HL = 1, och annars är VL = HL = 0.

På vektor-matris-form:

$$\min\ (1,3,1,4,1,2)x$$

$$\text{då}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{nod:} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

båge: (1,2) (1,3) (2,3) (2,4) (3,2) (3,4)

$1 \geq x \geq 0$ och heltalig

där $x = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{34})^T$.

Bivillkoren innehåller en anslutningsmatris:

- en rad per nod
- en kolumn per båge
- $a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{om båge } k \text{ startar i nod } i \\ -1 & \text{om båge } k \text{ slutar i nod } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Generellt: $\min\ c^T x$

då $Ax = b$

$1 \geq x \geq 0$ och heltalig

där A = en anslutningsmatris

$b = (1, 0, \ldots, 0, -1)^T$

Modellering av bv-träd?

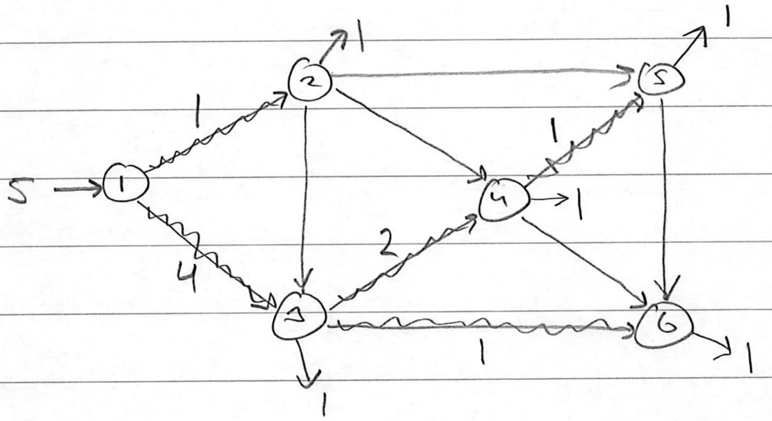
Skillnoder:

$b = (m-1, -1, \dots, -1)^T$

$x \geq 0$ och heltalig

x_{ij} = flöde på båge (i,j)

exempel på tillåte lösning:



$(i) \xrightarrow{x_{ij}} (j)$

<u>Definition</u>: En matris är <u>fullständigt unimodulär</u> om dess kvadratiska delmatriser har determinanter som är 0, +1 eller -1.

Obs: Om en matris är fullständigt unimodulär så är alla dess element 0, +1 eller -1.

Sats: Varje anslutningsmatris är fullständigt unimodulär.

Bevis: Låt m beteckna antalet rader i anslutningsmatrisen. Betrakta kvadratiska delmatriser av storlek $k \times k$, där $k \leq m$, och använd induktion med avseende på k.

i) Alla element i matrisen är 0, +1 eller −1. Alltså har alla kvadratiska delmatriser av storlek 1×1 determinanter som är 0, +1 eller −1.

ii) Låt $2 \leq k \leq m$ och antag att alla kvadratiska delmatriser av storlek $(k-1) \times (k-1)$ har determinanter som är 0, +1 eller −1. Låt A_k vara en kvadratisk delmatris av storlek $k \times k$. Tre fall kan då uppträda:

1. A_k innehåller minst en nollkolumn, varför $\det A_k = 0$.
2. Alla kolumner innehåller både en +1 och en −1. Radsumman blir då en nollrad, varför $rang(A_k) < k$ och $\det A_k = 0$.
3. Någon kolumn innehåller endast en +1 eller en −1. Utveckling av determinanten längs denna kolumn ger att $\det A_k = \pm \underbrace{\det A_{k-1}}_{0,\pm 1} = 0, \pm 1$.

Alltså gäller att $\det A_k = 0, \pm 1$

iii) Genom induktion följer att alla kvadratiska delmatriser av storlek $k \times k$, där $k \leq m$, har determinanter som är 0, +1 eller −1.

Komplikation: raderna i $\bar{A}$ är linjärt beroende, ty radsumman blir noll-vektorn.

Man kan visa att exakt ett villkor kan strykas utan att problemet förändras.

Stryk tex det första villkoret. Då fås systemet $\bar{A}x = \bar{b}$, där $\bar{A}$ innehåller $m-1$ rader och $\bar{b} = (0, 0, \ldots, 0, -1)^T$.

Obs: att stryka ett villkor innebär att även motsvarande dualvariabel stryks, eller ekvivalent att denna dualvariabel sätts till noll. (Återkommer senare!)