# Heltalsoptimering

Uppkommer genom variabeldefinitioner eller genom hjälpkonstruktioner vid modellering av icke-konvexiteter.

Variabeldefinitioner:

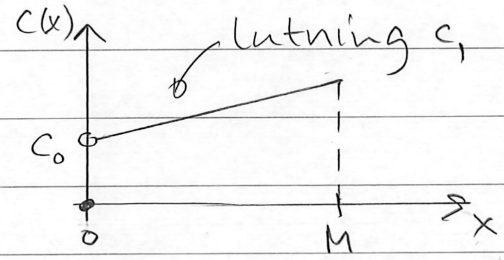
- logiska beslut: $x_j = \begin{cases} 1 & \text{om} \ldots \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

- antal av diskreta storheter:
  $x_j$ = antal som ...

Hjälpkonstruktioner:

- fasta kostnader:

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x = 0 \\ c_0 + c_1 x & \text{om } x > 0 \end{cases}$$




obs: olinjär!

antag: $x \le M$ och kostnadsminimering

kan ersättas av: $\begin{cases} c(x,y) = c_0 y + c_1 x \\ x \le My \\ y = 0/1 \end{cases}$

ty: $x = 0 \underset{\min}{\Rightarrow} y = 0 \Rightarrow c(x,y) = 0$

$x > 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow c(x,y) = c_0 + c_1 x$

obs: $c(x,y) = c_0 y + c_1 x$ är linjär

- disjunktioner: <u>minst</u> <u>ett</u> av de $m$ stycken villkoren $a_i^T x \le b_i$, $i=1,\dots,m$, ska uppfyllas

kan modelleras som:

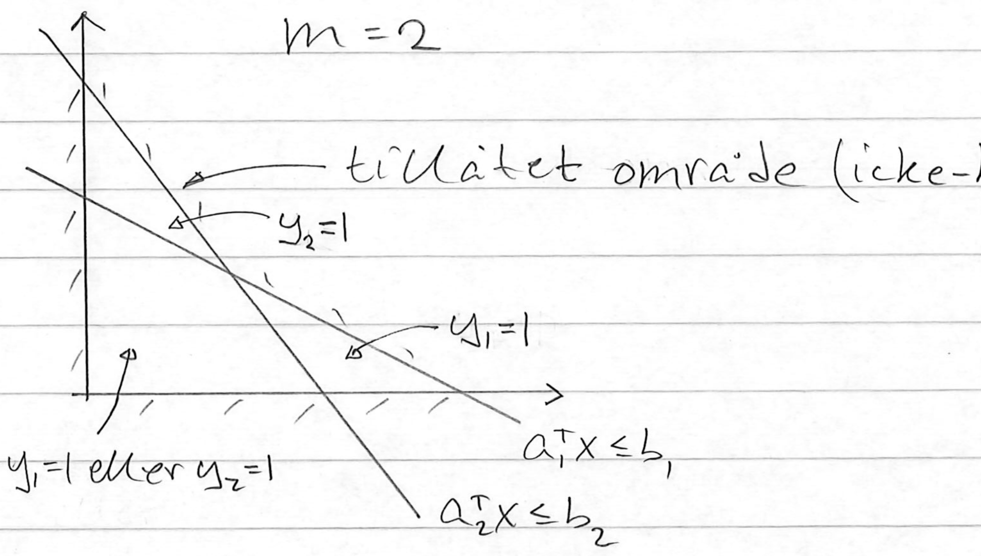
$$\begin{cases} a_i^T x \le b_i + M(1-y_i), & i=1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \\ y_i = 0/1, & i=1,\dots,m \end{cases}$$

där $M$ är ett stort positivt tal

ty: $y_i = 1 \Rightarrow a_i^T x \le b_i$ ska uppfyllas

$y_i = 0 \Rightarrow a_i^T x \le b_i + M$ ska gälla

$\Rightarrow a_i^T x > b_i$ får gälla




- diskreta värden: $x \in \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

låt $x = \sum_{i=1}^{k} v_i y_i$ där $\sum_{i=1}^{k} y_i = 1$ och $y_i = 0/1$, $i=1,\dots,k$

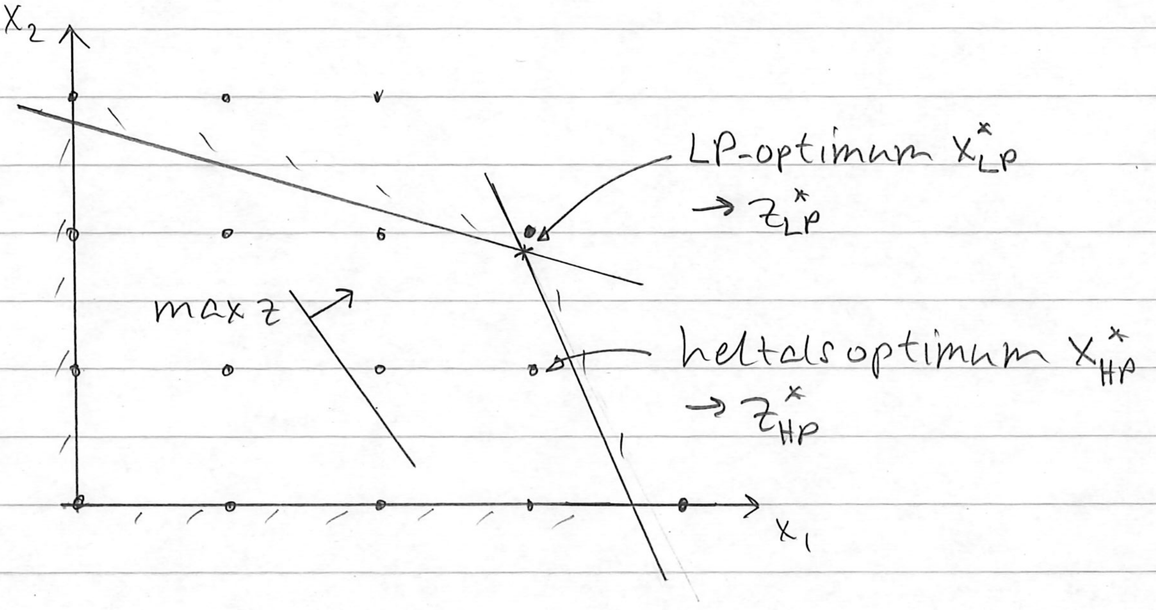
(x substitueras bort!)

%

Heltalsproblem löses ofta med metoder som bygger på att heltalskrav relaxeras (dvs stryks). Om modellen är linjär så kommer den kontinuerliga relaxationen då att bli ett linjärt optimeringsproblem. Kallas för LP-relaxation.

Alltså eftersträvas linjära heltalsmodeller!

relaxation = mindre begränsat problem, dvs med färre villkor




Obs: $z^*_{LP} > z^*_{HP}$ gäller

Generellt: $\begin{cases} \text{maximering: } z^*_{LP} \geq z^*_{HP} \\ \text{minimering: } z^*_{LP} \leq z^*_{HP} \end{cases}$

LP-relaxationen ger en optimistisk skattning av $z^*_{HP}$!

$|z^*_{LP} - z^*_{HP}|$ kallas dual-gap.

Heltalsproblem är icke-konvexa och ofta mycket svårlösta (beräkningskrävande).

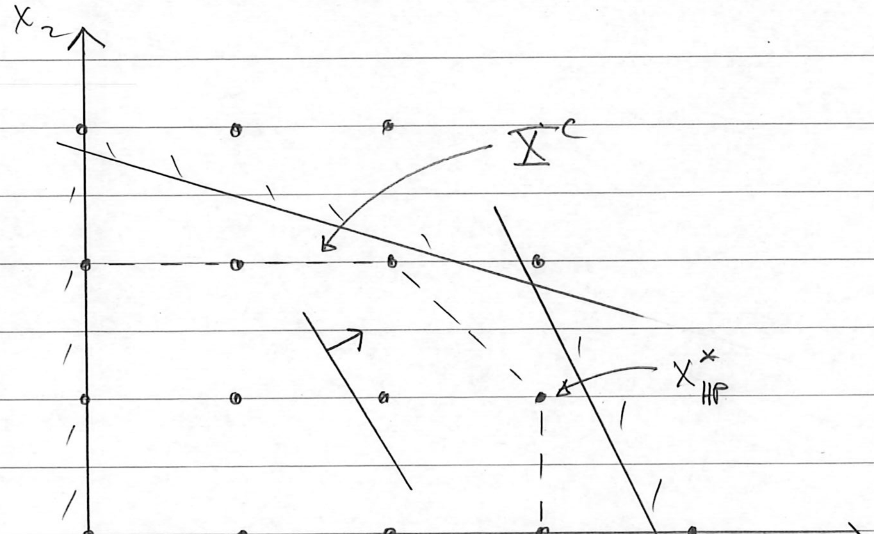
Optimum fås typiskt inte i en hörnpunkt till LP-relaxationens tillåtna område. Dock fås optimum i en hörpunkt till det konvexa höljet av de tillåtna heltalslösningarna.

Definition: Konvexa höljet av en mängd är den minsta konvexa mängd som innehåller mängden.

Sats: Låt $X = \{x^1, ---, x^p\} \neq \emptyset$ vara de tillåtna lösningarna till ett linjärt heltalsproblem. Då är (minst) en hörnpunkt till det konvexa höljet

$$X^c = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i \text{ där } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ och } \lambda_i \geq 0, \forall i\}$$

optimal i problemet.




$p = 11$

Här är $X^c = \{x \mid x_1 + x_2 \le 4,\ x_1 \le 3,\ x_2 \le 2 \text{ och } x_1, x_2 \ge 0\}$.

Generellt är det dock i praktiken omöjligt att beskriva konvexa höljet mha villkor som uttrycks i endast x.

Observation: Det LP-tillåtna området utgör en (yttre) approximation av det konvexa höljet.

Ibland kan denna approximation förbättras genom en <u>starkare</u> <u>formulering</u> av problemet.

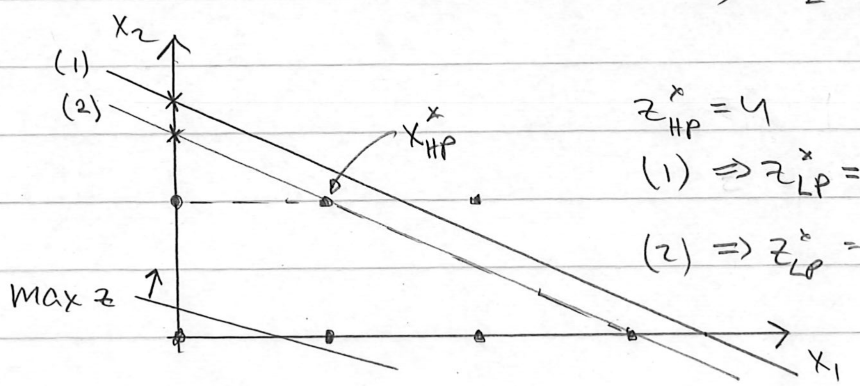
Princip: de tillåtna heltalslösningarna ska vara oförändrade, men det ska finnas färre LP-tillåtna lösningar.

<u>Exempel</u>: 

$$(1)\quad z^*_{HP} = \max z = x_1 + 3x_2 \quad \text{då } 2x_1 + 4x_2 \le 7,\quad x_1, x_2 \ge 0 \text{ och heltal}$$

starkare: 

$$(2)\quad z^*_{HP} = \max z = x_1 + 3x_2 \quad \text{då } x_1 + 2x_2 \le 3,\quad x_1, x_2 \ge 0 \text{ och heltal}$$




$z^*_{HP} = 4$

$(1) \Rightarrow z^*_{LP} = 5\frac{1}{4} \Rightarrow z^*_{LP} - z^*_{HP} = 1\frac{1}{4}$

$(2) \Rightarrow z^*_{LP} = 4\frac{1}{2} \Rightarrow z^*_{LP} - z^*_{HP} = \frac{1}{2}$

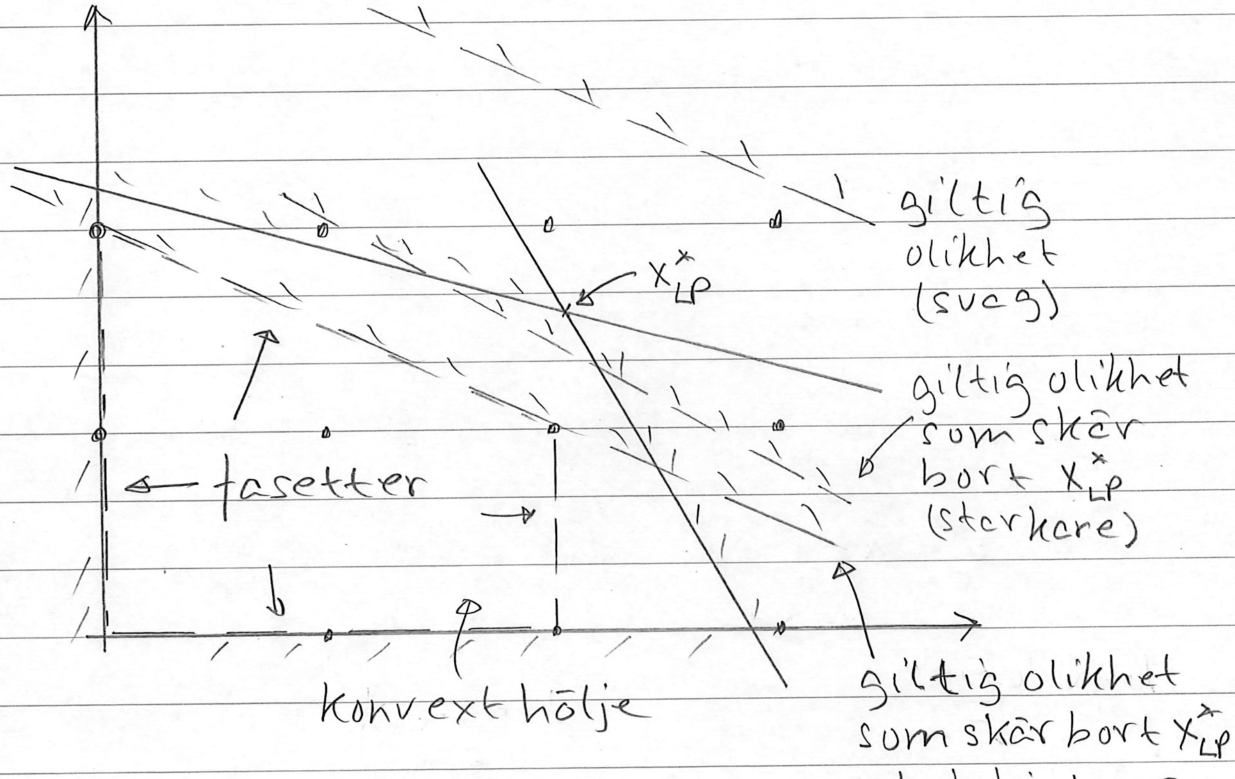
För heltalsproblem kan ofta formuleringen påverka den praktiska lösbarheten!

stark formulering → bra approximation av konvexa höljet och ett litet dual-gap

Approximationen av konvexa höljet kan även förbättras genom skapande av nya villkor. Kallas plansnittning.

Några begrepp:

Villkoret $a^T x \leq b$ är en giltig olikhet för $X$ om $X \subseteq \{x \mid a^T x \leq b\}$.




fasett = begränsningsyta till konvexa höljet av maximal dimension