

Gomory-snitt

Givet heltalsproblemet

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \text{ och heltalig,} \end{aligned} \quad (HP)$$

där $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$ och $c \in R^n$ är heltaliga.

Antag att LP-optimum fås i baslösningen $\begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$.

Antag att $x_B^* = B^{-1}b$ inte är heltalig och att speciellt den i :te basvariabeln, dvs x_i , har ett fraktionellt (icke-heltaligt) värde.

Bivillkorssystemet uttryckt i LP-relaxationens optimalbas:

$$Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b.$$

Studera den i :te raden (där x_i är basvariabel), vilken kan skrivas

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \bar{a}_{ij}x_j = \bar{b}_i, \quad (1)$$

där $(\bar{a}_{i,m+1}, \dots, \bar{a}_{ij}, \dots, \bar{a}_{in})$ är den i :te raden i matrisen $B^{-1}N$ och $\bar{b}_i$ är den i :te komponenten av vektorn $B^{-1}b$. Med icke-basvariablerna $x_j = 0$, $j = m+1, \dots, n$, fås $x_i = \bar{b}_i$, vilken antogs vara fraktionell.

(Observera att ekvationen ovan helt enkelt är en bivillkorsrad i en optimal simplextablå!)

Låt $\lfloor \cdot \rfloor$ beteckna heltalsdelen av ett reellt tal (dvs avrundning nedåt) och inför

$$f_i = \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \quad (\Rightarrow 0 < f_i < 1),$$

och

$$f_{ij} = \bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor \quad (\Rightarrow 0 \leq f_{ij} < 1).$$

Ekvation (1) kan nu skrivas

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n (\lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor + f_{ij})x_j = \lfloor \bar{b}_i \rfloor + f_i.$$

(Varje konstant tecknas som ett heltal plus ett fraktionellt tal.)

Efter omskrivning fås:

$$x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor + \sum_{j=m+1}^n \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j = f_i - \sum_{j=m+1}^n f_{ij} x_j. \quad (2)$$

[Notera att ekvation (2) är ekvivalent med (1). Varje tillåten lösning till LP-relaxationen av (HP) uppfyller därför (2).]

Eftersom $f_i < 1$ och $f_{ij} \geq 0$, $j = m+1, \dots, n$, så gäller att

$$f_i - \sum_{j=m+1}^n f_{ij} x_j < 1,$$

då $x_j \geq 0$, $j = m+1, \dots, n$.

För en tillåten lösning som dessutom är heltalig är vänster led av (2) heltaligt. Vi kan alltså dra följande slutsats.

Varje tillåten heltalslösning till (HP) uppfyller villkoret

$$x_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor + \sum_{j=m+1}^n \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq 0,$$

det vill säga

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor.$$

Detta villkor kallas *Gomorys heltals-snitt*.

Ur ekvation (2) fås den *alternativa beskrivningen*

$$f_i - \sum_{j=m+1}^n f_{ij} x_j \leq 0,$$

eller

$$- \sum_{j=m+1}^n f_{ij} x_j \leq -f_i,$$

vilket kallas *Gomorys fraktionella snitt*.

- Heltals-snittet och det fraktionella snittet är ekvivalenta.
- Av härledningen följer att ett Gomory-snitt *aldrig* skär bort någon tillåten heltalslösning.
- LP-relaxationens optimum, där icke-basvariablerna $x_j = 0$, $j = m + 1, \dots, n$, är *inte* tillåten i det fraktionella snittet (och, ekvivalent, $x_i = \bar{b}_i$ och $x_j = 0$, $j = m + 1, \dots, n$, uppfyller inte heltals-snittet). Alltså gäller att ett Gomory-snitt *alltid* skär bort aktuellt LP-optimum. Då snittet adderas till LP-relaxationen kommer därför optimalvärdet *försämrats* (öka i ett minimeringsproblem) [utom möjligen då LP-relaxationen har alternativa optima].