Exempel $\max z = 4x_1 - x_2$

$$\text{då} \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 14 & (1) \\ x_2 + x_4 = 3 & (2) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3 & (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ och heltal} \end{cases}$$

där $x_3, x_4$ och $x_5$ är slackvariabler.

Observera: $z = 4x_1 - x_2$ där $x_1$ och $x_2$ ska vara heltal $\Rightarrow$ z ska vara heltalig.

Lös LP-relaxationen! Optimaltablå:

| bas | $-z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | värde | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | | | $-\frac{4}{7}$ | $-\frac{1}{7}$ | | $-\frac{59}{7}$ | |
| $x_1$ | | 1 | | $\frac{1}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | | $\frac{20}{7}$ | ← ej heltal! |
| $x_2$ | | | 1 | | 1 | | 3 | |
| $x_5$ | | | | $-\frac{2}{7}$ | $\frac{10}{7}$ | 1 | $\frac{23}{7}$ | |

Vilken rad ska väljas för att skapa ett Gomory-snitt?

Vanlig strategi: välj den rad vars basvariabel har störst fraktionell del.

fraktioner: $-\frac{59}{7} - \lfloor -\frac{59}{7} \rfloor = -\frac{59}{7} - (-9) = \frac{4}{7}$

$\frac{20}{7} - \lfloor \frac{20}{7} \rfloor = \frac{20}{7} - 2 = \frac{6}{7}$ ← störst!

$\frac{23}{7} - \lfloor \frac{23}{7} \rfloor = \frac{23}{7} - 3 = \frac{2}{7}$

$x_1$-raden: $x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 = \frac{20}{7}$

Gomorys heltalssnitt: $x_1 + \lfloor \frac{1}{7} \rfloor x_3 + \lfloor \frac{2}{7} \rfloor x_4 \leq \lfloor \frac{20}{7} \rfloor$

$\Rightarrow x_1 + 0x_3 + 0x_4 \leq 2 \Rightarrow x_1 \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_6 = 2 \\ x_6 \geq 0 \end{cases}$

Lägg till. Lös LP-relaxationen. Optimaltablå:

| bas | $-z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | värde | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | | | | | $-\frac{1}{2}$ | $-3$ | $-\frac{15}{2}$ | |
| $x_1$ | | 1 | | | | | 1 | 2 | |
| $x_2$ | | | 1 | | | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | ← ej heltal! |
| $x_3$ | | | | 1 | | $-1$ | $-5$ | 1 | |
| $x_4$ | | | | | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $\frac{5}{2}$ | |

Observera: $z = \frac{15}{2} < \frac{59}{7}$ beroende på att snittet skar bort förra LP-optimum.

Alla fraktioner $\frac{1}{2}$. Välj tex $x_2$-raden.

$x_2$-rade: $x_2 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = \frac{1}{2}$

Heltalssnitt: $x_2 + \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor x_5 + \lfloor 1 \rfloor x_6 \leq \lfloor \frac{1}{2} \rfloor$

$\Rightarrow x_2 - x_5 + x_6 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_7 \geq 0 \end{cases}$

Lägg till. Lös LP-relaxationen.

Optimaltablå:

| bas | $-z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | värde |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | | | | | | $-3$ | $-1$ | $-7$ |
| $x_1$ | | 1 | | | | | 1 | | 2 |
| $x_2$ | | | 1 | | | | 1 | $-1$ | 1 |
| $x_3$ | | | | 1 | | | $-5$ | $-2$ | 2 |
| $x_4$ | | | | | 1 | | $-1$ | 1 | 2 |
| $x_5$ | | | | | | 1 | | $-2$ | 1 |

Observera: $z = 7 < \frac{15}{2}$

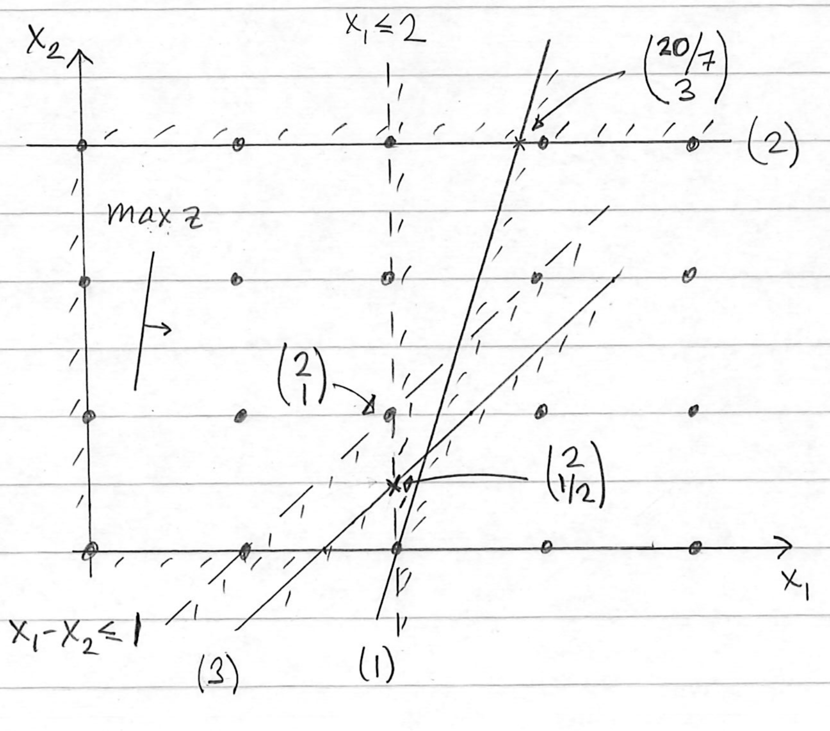
Heltaligt LP-optimum $\Rightarrow$ heltalsoptimum!

Alltså: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$ med $z_{ILP}^* = 7$.

Observera: $x_2 - x_5 + x_6 \leq 0 \iff x_2 - (3 - 2x_1 + 2x_2) + (2 - x_1) \leq 0$

$$2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3$$
$$x_1 + x_6 = 2$$

$\iff x_1 - x_2 \leq 1$



Det finns många andra sätt att skapa giltiga olikheter som skär bort LP-lösningar.

Exempel Variabelövertäckningar

$$\begin{cases} 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 \leq 19 & (1) \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 = 0/1 & (2) \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ kan inte gälla $\Rightarrow$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3 \qquad (3)$$

är en giltig olikhet. Kallas övertäckning.

tex $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3}{4}$ och $x_4 = 0$ uppfyller (1) men inte (3) $\Rightarrow$ (3) skär bort LP-lösningar

(3) kan stärkas till

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \qquad (4).$$

starkare ty om (4) och (2) gäller så fås $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 + 1 \leq 3$, dvs att (3) gäller, varför (4) och (2) $\Rightarrow$ (3)

(4) kan inte stärkas ytterligare och är därför en minimal övertäckning.