

Trädsökning

Metodprincip för heltalsoptimering.

Komponenter:

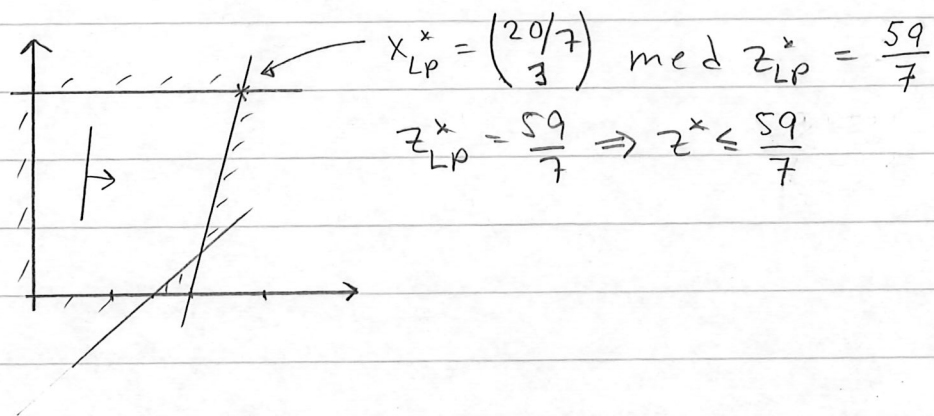
- relaxering: ger en optimistisk skattning
- förgrening: utesluter det relaxerade problemets optimum och partitionerar det tillåtna området
- varje funnen tillåten lösning i det ursprungliga problemet ger en pessimistisk skattning
- beskärning mha skattningar
- avsökningsstrategi

Vanligast:

- LP-relaxation
- förgrening över fraktionell variabel

Exempel $z^* = \max z = 4x_1 - x_2$
da $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ och heltal} \end{cases}$
(P)

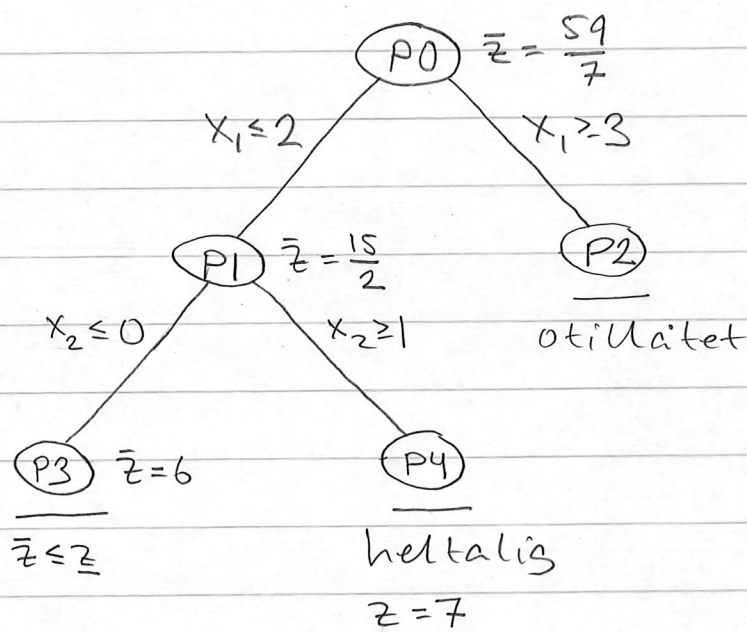
P0: LP-relaxationen av (P)



x_{LP}^* ej heltalig $\Rightarrow$ förgrena

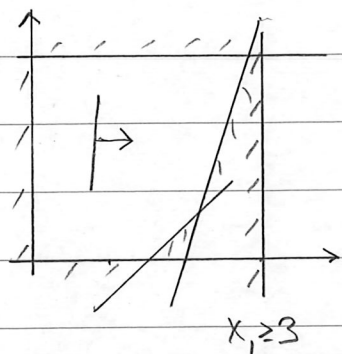
Skapa problemen: P1: P0 och $x_1 \leq \lfloor \frac{20}{7} \rfloor = 2$
P2: P0 och $x_1 \geq \lfloor \frac{20}{7} \rfloor + 1 = 3$

Observera: x_{LP}^* är inte tillåten i varken P1 eller P2, och varje tillåten heltalslösning är tillåten i endera P1 eller P2.



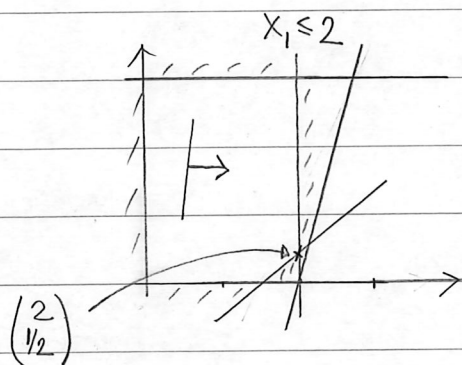
Ausök högergrenen först!

P2:



saknar tillåten
lösning $\Rightarrow$
kapa grenen
(finns ingen heltalslösning)

P1:



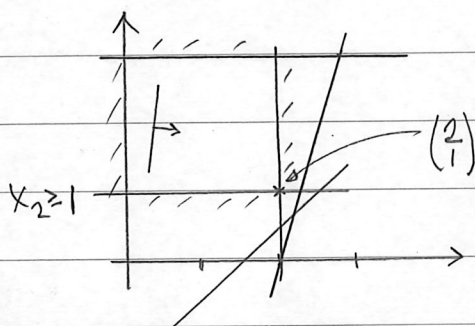
LP-optimum: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$
med $z = \frac{15}{2} \Rightarrow \bar{z} = \frac{15}{2}$

ej heltaligt $\Rightarrow$ förgrena

P3: P1 och $x_2 \leq \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

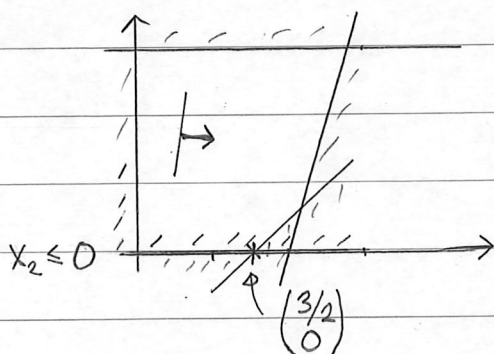
P4: P1 och $x_2 \geq \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + 1 = 1$

P4:



LP-optimum: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
med $z = 7$

heltaligt $\Rightarrow \bar{z} = 7$
och kapa grenen



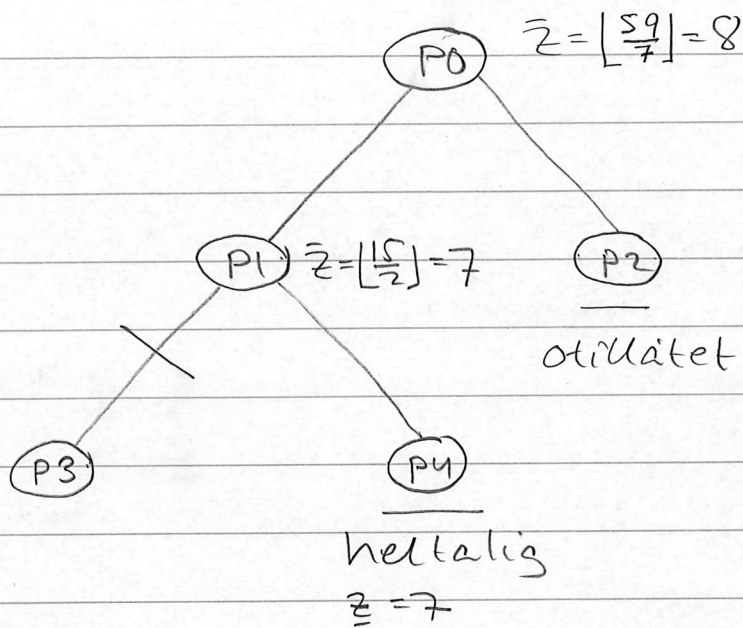
LP-optimum: $x = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
med $z = 6 \Rightarrow \bar{z} = 6$

ej heltaligt, men
 $\bar{z} \leq z \Rightarrow$ kapa grenen
(kan inte ge något
bättre än $\bar{z}$)

Trädet avslökt!

Alltså: $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z^* = 7$

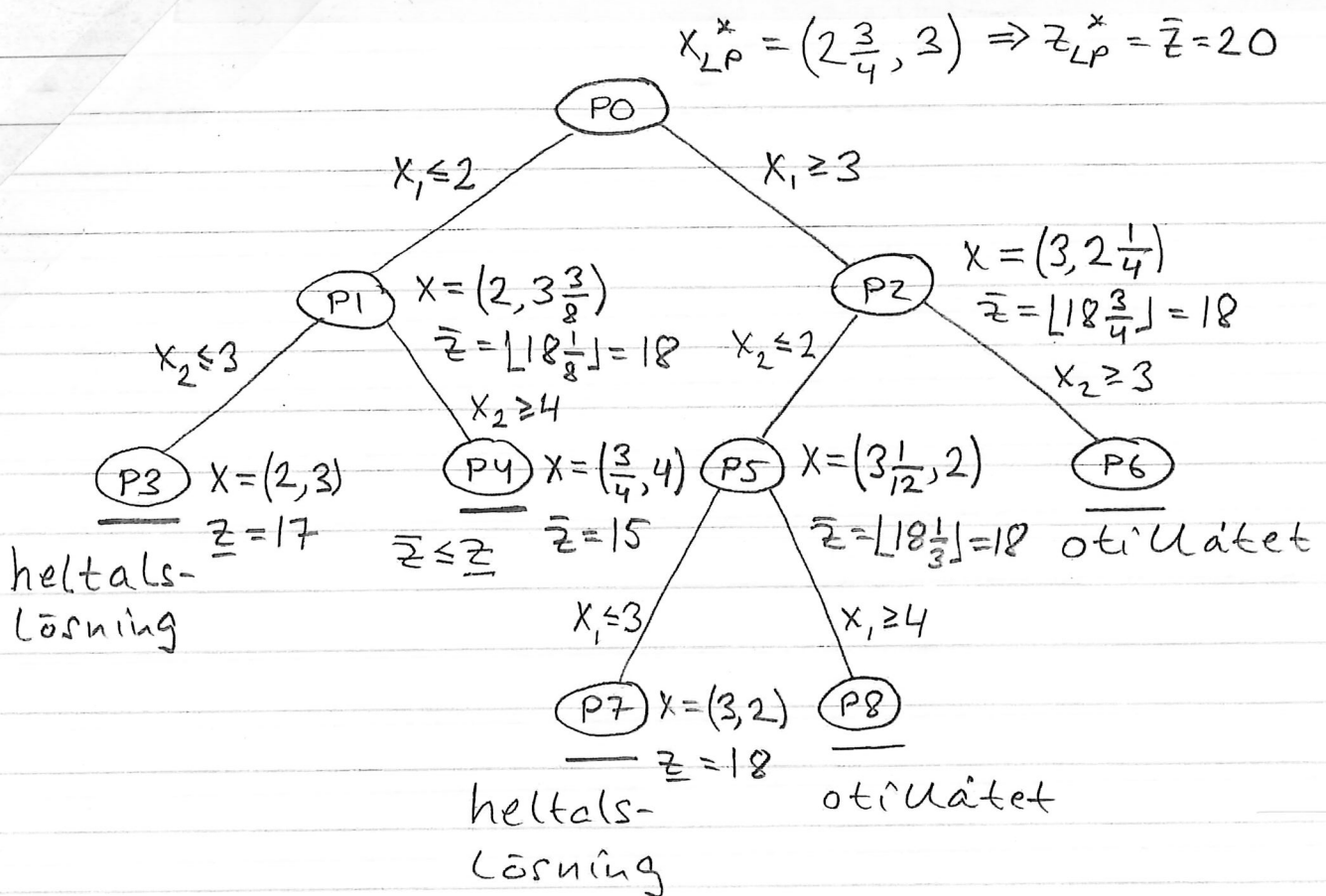
Om man utnyttjar att z ska vara heltalig:



P3 behöver inte undersökas ty $\bar{z} \leq \underline{z}$.

Exempel $z^* = \max z = 4x_1 + 3x_2$
 då $\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 45 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 35 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ och heltal} \end{cases}$

Förgräna över mest fraktionella variabler.
 Avsök mindre-än-grener först.
 Använd djup-först-sökning.



Avsökningsordning: P0, P1, P2, P4, P2, P5, P7, P8, P6

Optimum: $x^* = (3, 2)$ med $z^* = 18$.

En gren kapas då:

- LP-relaxationen saknar tillåten lösning
- LP-optimum är heltaligt
- den optimistiska skattningen inte är bättre än den aktuella pessimistiska skattningen

○ Den optimistiska skattningen är giltig under det delpproblem där den beräknas.

Den pessimistiska skattningen är giltig i hela trädet.

Observera: den optimistiska skattningen försämras (maximering: minskar) med djupet på trädet, eftersom allt fler förgreningsvillkor då tillkommer.

○

Trädsökning på knappsäcksproblem

$$z^* = \max z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$\text{då } 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0/1$$

$$x_j = 0/1, j=1, \dots, 4 \Leftrightarrow 0 \leq x_j \leq 1 \text{ och heltal, } j=1, \dots, 4$$

LP-relaxation: $0 \leq x_j \leq 1, j=1, \dots, 4$

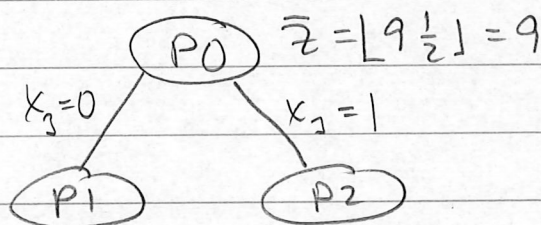
ett villkor $\Rightarrow$ LP-relaxationen kan lösas utan simplexmetoden

$$\text{Observera: } \frac{5}{3} > \frac{3}{2} > \frac{2}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{variablerna}$$

används i ordningen x_1, x_2, x_3, x_4 .

(Obs: bara för LP-relaxation!))

$$\text{LP-optimum: } x_{LP}^* = (1, 1, \frac{2}{3}, 0) \Rightarrow z_{LP}^* = 9\frac{1}{3}$$

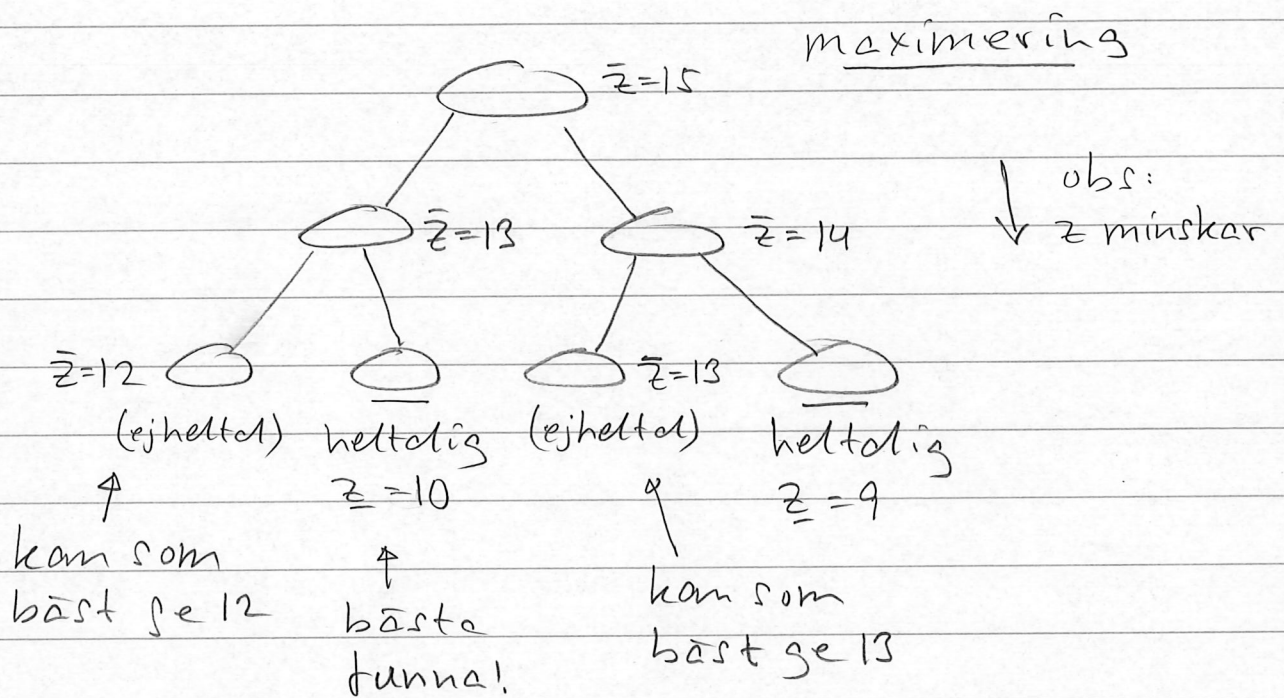


Och så vidare...

Observera: förgrening i 0/1-problem resulterar i fixeringar av variabler.

Avbrott före verifierad optimalitet

Om en trädsökning avbryts innan hela trädet är avsökt: vad kan man då dra för slutsats?



Alltså: $10 \leq z^* \leq 13$