Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Optimeringslära

Optimeringslära grundkurs för Y
Laboration 1
31 januari 2021

Laboration 1 - Simplexmetoden och modellformulering

Den första delen av laborationen syftar till att ge träning på simplexmetoden och öka förståelsen för linjärprogrammering. För att lösa LP-problem används här ett program skrivet i MATLAB. Programmet används för att skapa simplextablåer och utföra pivoteringar, men man får själv ange startbas och välja inkommande och utgående variabeler.
I laborationens andra del ska två problem formuleras och lösas med hjälp av modelleringsspråket AMPL. Syftet med detta är att ge förståelse för hur ett kommersiellt programpaket för optimeringsmodellering fungerar. Se "Introduktion till modelleringsspråket AMPL" för instruktioner och exempel. (AMPL ska även användas i laboration 2.)

1. Simplexmetoden

1. (**Ska förberedas.**) Inför slackvariabler i de två nedanstående LP-problemen.

2. Ge kommandot `module add prog/matlab/` i ett terminalfönster. Ge därefter kommandot `matlab &` i samma terminalfönster.

3. I MATLAB-fönstret ges kommandot `addpath /courses/TAOP07/Simplex/` varefter simplexprogrammet startas med `SimplexMeny`.

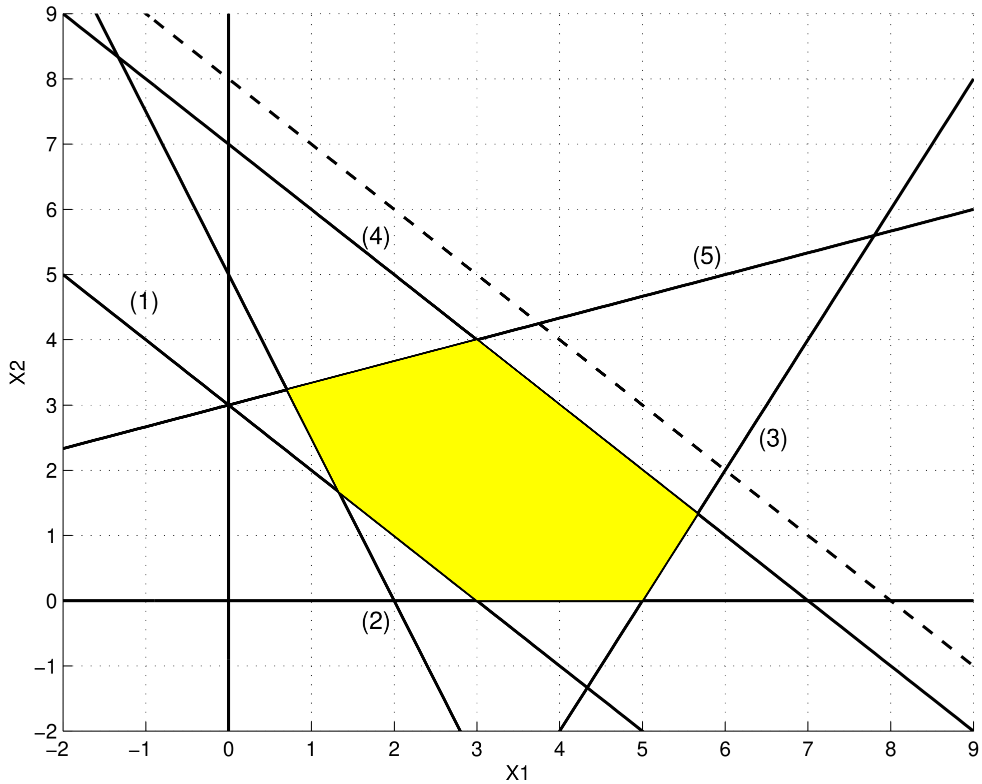
4. Lös problemet nedan utgående från startbasen $(x_1, x_2, s_1, s_3, s_4)$, där s_1, s_3 och s_4 är slackvariabler.

$$
\begin{array}{llcrcrl}
\max z = & 10x_1 & + & 2x_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 & \quad (1) \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & \geq & 10 & \quad (2) \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10 & \quad (3) \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 & \quad (4) \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 & \quad (5) \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Rita in varje iterationspunkt i figur 1.

Optimallösning: ....

Optimala basvariabler: ....



Figur 1: Tillåtet område till uppgift 4

Vad är skuggpriset för villkor (4)? ....

Öka högerledet i villkor (4) till 8 (streckad linje i figuren). Hur stor förändring av det optimala målfunktionsvärdet kan *förväntas*? ....

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet? ....

Optimala basvariabler: ....

Minska högerledet till 4. Vilket optimalvärde *förutsäger* skuggpriset? ....

Vad blir optimalvärdet? [Lös det modifierade problemet genom att starta om från basen $(x_1, x_2, s_1, s_3, s_4)$.] ....

Optimala basvariabler: ....

För vilka högerled i villkor (4) är skuggpriset (för högerledet 7) giltigt? [Utnyttja figuren och enkla beräkningar!] ....

5. Lös följande problem.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max z = & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & & & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 10 & & (1) \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 & & (2) \\
 & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 13 & & (3) \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Vilka variabler ingår i optimalbasen? ....

Optimallösning: ....

Dual optimallösning: ....

6. (**Ska förberedas.**) Antag att ett LP-problem som lösts med simplexmetoden ska utökas med en *ny variabel*. Hur beräknas dess reducerade kostnad (i aktuell bas)?

....

7. Antag att problemet i uppgift 5 utökas med en ny variabel, x_7, med målfunktionskoefficient $c_7 = 2$ och bivillkorskolumn $A_7 = (3, 0, 1)^T$. Visa med en manuell uträkning att detta leder till att optimum förändras.

....

Inför den nya variabeln i optimaltablån i uppgift 5. (Obs! Skriv in koefficienternas *ursprungliga* värden.) Utgå från den bas som tidigare var optimal och *reoptimera* (dvs lös det modifierade problemet). Ny optimallösning:

....

2. Modellering med AMPL

8. (**Ska förberedas.**) Läs igenom introduktionen till modelleringsspråket AMPL. För att köra AMPL ges kommandot `module add prog/ampl-demo/` i ett terminalfönster. Detta kommando måste upprepas i varje fönster där AMPL ska köras.

9. Kopiera filer till er hemkatalog med `cp /courses/TAOP07/Lab1/* .` (Notera punkten på slutet.)

10. Betrakta åter problemet i uppgift 4.

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\max z = & 10x_1 & + & 2x_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 & \quad (1) \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & \geq & 10 & \quad (2) \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10 & \quad (3) \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 & \quad (4) \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 & \quad (5) \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Lös problemet genom att modellera det i AMPL. Datafilen `lpuppgift.dat` finns redan på ert konto. Använd parameternamn som överensstämmer med de i datafilen. (Obs! I datafilen ges alla villkor på mindre än-form.) Konstruera själva även den kommandofil som behövs.

Optimallösning: ....

Hur stora är slacken i villkoren? ....

Dual optimallösning: ....

Reducerade kostnader: ....

11. Ett oljebolag har i Europa en uppsättning raffinaderier, R (se karta, figur 2), med kända kapaciteter K_r ton, $r \in R$. Dessa raffinaderier skeppar på vatten eller transporterar på land ut en mängd produkter, $p \in P$, till en uppsättning terminaler, T. En terminal $t \in T$ vill ta emot mellan l_{pt} och u_{pt} ton av en produkt $p \in P$.

Oljebolaget vill maximera intäkter minus kostnader. Försäljningsintäkten f_{pt} per ton av produkt p vid terminal t och tillverkningskostnaden q_{pr} per ton av produkt p vid raffinaderi r är givna. Avståndet från raffinaderi r till terminal t är d_{rt} mil, och kostnaden för att transportera ett ton av en produkt en mil är k. (Man antar för enkelhetens skull att kostnaden för transport på land och till sjöss är lika.) Transportkostnaden blir alltså $c_{rt} = kd_{rt}$ per ton.

Oljebolagets problem kan formuleras på följande sätt.

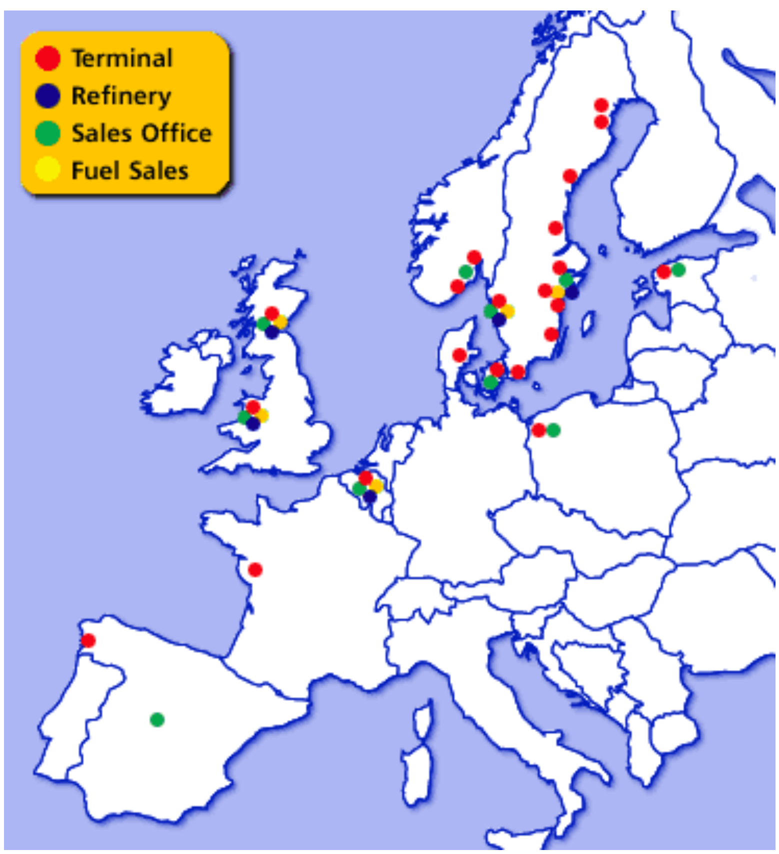
Variabeldefinitioner:

x_{pr} = producerad mängd av produkt p vid raffinaderi r (ton)
z_{prt} = transporterad mängd av produkt p från raffinaderi r till terminal t (ton)

Modell:

$$
\begin{array}{llrcll}
\max z = & \sum_p \sum_r \sum_t (f_{pt} - c_{rt})\, z_{prt} - \sum_p \sum_r q_{pr} x_{pr} & & & & \\
\text{då} & l_{pt} \leq \sum_r z_{prt} & \leq & u_{pt} & \forall\ p,t & (1) \\
 & x_{pr} & = & \sum_t z_{prt} & \forall\ p,r & (2) \\
 & \sum_p x_{pr} & \leq & K_r & \forall\ r & (3) \\
 & x_{pr},\ z_{prt} & \geq & 0 & & (4)
\end{array}
$$

Villkorsgrupp (1) ser till att varje terminal får efterfrågad kvantitet. Villkorsgrupp (2) är kopplingen mellan variablerna x_{pr} och z_{prt}, och ser till att det som tillverkas av en viss produkt vid ett visst raffinaderi sedan transporteras ut till terminalerna. Villkorsgrupp (3) ser till att raffinaderiernas kapaciteter inte överskrids. Villkorsgrupp (4), slutligen, följer av variablernas definitioner.



Figur 2: Karta till uppgift 11

(**Ska förberedas**) Formulera oljebolagets problem i AMPL. Nedan ges början till en sådan modellfil. I AMPL används ofta längre och på så sätt mer förståeliga namn på parametrar, mängder och variabler. De namn som används nedan sammanfaller med de som finns i datafilen `olja.dat` (som redan kopierats till er hemkatalog).

```
set PRODUKTER;
set RAFFINADERIER;
set TERMINALER;

param ovre{p in PRODUKTER, t in TERMINALER};
param undre{p in PRODUKTER, t in TERMINALER};
param pris{p in PRODUKTER, t in TERMINALER};
param milkostn;
param avstand{r in RAFFINADERIER, t in TERMINALER};
param raffkostn{p in PRODUKTER, r in RAFFINADERIER};
param raffkap{r in RAFFINADERIER};
```

Antal variabler och bivillkor i problemet: ....

Lös problemet. Optimalt målfunktionsvärde: ....

Har något raffinaderi kapacitet över? ....

Vad är skuggpriset för kapaciteten i Nynäshamn? ....

Vilket optimalt målfunktionsvärde kan förväntas om kapaciteten i Nynäshamn ökar

med 10 ton? ....

Lös det modifierade problemet. Blev resultatet det förväntade? Varför (inte)?

....

Hur förändrades kapacitetsutnyttjandet? Förklara! ....

....

....

Öka kapaciteten i Nynäshamn med ytterligare 40 ton till 550 ton. Överensstämmer skillnaden i målfunktionsvärdet med skuggpriset? Varför (inte)?

....

....